

# Quelques outils pour l'analyse.

## 1 Inégalités à connaître.

### 1.1 Algébriques.

**Théorème 1**  $\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \cdot b \leq \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2) \\ \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad |a \cdot b| \leq \frac{1}{2} \cdot (|a|^2 + |b|^2) \end{array} \right.$

**Rem**  $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\bar{a} \cdot b).$

### **Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz.)**

$$\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2 \cdot n}, \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

avec égalité si et seulement si il y a colinéarité.

### 1.2 Inégalités de convexité.

**Théorème 3** Soit  $\mathbb{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

(i)  $\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot f(y).$

(ii)  $\forall (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) \in \mathbb{I}^p, \forall (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}_+^p$  tel que  $\sum_{j=1}^p t_j = 1, \quad f\left(\sum_{j=1}^p t_j \cdot x_j\right) \leq \sum_{j=1}^p t_j \cdot f(x_j).$

(iii) Si de plus,  $f$  est dérivable en  $a \in \mathbb{I}$ , alors on a :  $\forall x \in \mathbb{I}, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$

(iv) Le graphe de la fonction est ainsi au-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes.

**Théorème 4** Applications des inégalités de convexité.

(i) Fonction exp.

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$

(b)  $\forall x < 1, \quad e^x \leq \frac{1}{1 - x}.$

(ii) Fonction ln.

(a)  $\ln\left(\sum_{j=1}^n t_j \cdot a_j\right) \geq \sum_{j=1}^n t_j \cdot \ln(a_j).$

(b)  $\sum_{j=1}^n t_j \cdot a_j \geq \prod_{j=1}^n a_j^{t_j}.$

(c)  $\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1.$

(d)  $\forall u > -1, \quad \ln(1 + u) \leq u.$

(iii) Fonction sin.

(a)  $\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq \sin x \leq x.$

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|.$

$$(c) \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geq \frac{2 \cdot x}{\pi}.$$

**Théorème 5 (Inégalité de Young)**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

**Théorème 6 (Inégalité de Hölder)** Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{2 \cdot n}$ .

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot b_j \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Théorème 7 (Inégalité de Minkowsky)** L'application  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow N_p(A) = \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

est une norme.

**Rem (Fonctions strictement convexes)** L'égalité de convexité :  $f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) = t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$  pour une fonction strictement convexe n'est vérifiée que lorsque  $x = y$ , ou  $t = 0$ , ou  $t = 1$ .

**Rem**  $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante si et seulement si  $f' \geq 0$  et  $\{x \in \mathbb{I} / f'(x) = 0\}$  est d'intérieur vide.

### 1.3 Utilisation de formules de Taylor globales.

**Rem (Formule de Taylor locale : Formule de Taylor-Young)** Si  $f$  est  $\mathcal{C}^{n-1}$  au voisinage de  $a$  et  $f^{(n-1)}$  est dérivable en  $a$ ,  $f$  admet le  $dl_n$  au voisinage de  $a$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

#### 1.3.1 Formules de Taylor globales.

**Théorème 8 (Polynôme)** Soit un corps de caractéristique 0, si  $P$  est de degré  $d \leq n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot (X-a)^k \quad , \quad P(a+X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot X^k \\ P(a+X) = \sum_{k=0}^d \frac{a^k}{k!} \cdot P^{(k)}(X) \end{array} \right.$$

**Théorème 9 (Taylor intégral)**  $f : \mathbb{I} \longrightarrow E$  Banach,  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ , on a :

$$\text{Pour } (a, b) \in \mathbb{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(t) dt.$$

**Théorème 10 (Taylor Lagrange)**  $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$  ( $f$  à valeurs réelles),  $f \in \mathcal{C}^n$ .

$$\text{Pour } (a, b) \in \mathbb{I}^2, \quad \exists x \in ]a, b[ \quad \text{tel que} \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(c).$$

**Théorème 11 (Inégalité de Taylor)**  $f : \mathbb{I} \longrightarrow E$ , de Banach, espace normé, et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . On suppose  $f$  bornée sur  $\mathbb{I}$  :  $\|f^{(n)}(x)\| \leq M_n$ . On a alors :

$$\left\| f(b) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right\| \leq M_n \cdot \frac{|b-a|^n}{n!}$$

### 1.4 Encadrements de sommes de termes.

Soit  $S = \sum_{k=1}^n a_k$ , encadrer  $S$  avec  $a_k \in \mathbb{R}$ .

### Méthode naïve.

Soit  $A$  le plus grand des  $a_k$  et  $B$  le plus petit des  $a_k$ , on a :  $n \cdot B \leq S \leq n \cdot A$ .

### Utilisation d'intégrales.

On considère  $f S_{m,n} = \sum_{k=m}^n f(k)$  où  $f$  est monotone. On encadre  $f$  par la méthode des rectangles.

Avec  $f$  croissante, on a ainsi :  $\int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt$ .

En sommant, on obtient alors pour  $m \geq n \geq 2$  :  $\int_{m-1}^n f(t) dt \leq S_{m,n} \leq \int_m^{n+1} f(t) dt$ .

**Rem** Il peut être utile de sortir  $f(n)$  ou  $f(m)$ .

## 2 Comportements asymptotiques.

### 2.1 Développements limités.

Il est parfois utile de transformer un équivalent en  $dl$  :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  signifie aussi  $u_n = v_n + o(v_n)$ .

## 3 Suites récurrentes et équa. diff. linéaires et à coeff. constants.

Analogie :  $f_\alpha(t) = e^{\alpha \cdot t}$  est un vecteur propre de l'opérateur de dérivation  $D$ .  
 $u_\alpha = (\alpha^n)$  est de même un vecteur propre de l'opérateur de dérivation discrète.

1. Equation caractéristique.

- Si 2 solutions  $r_1$  et  $r_2 \neq r_1$ , l'ensemble des solutions de  $(E)$  est l'espace vectoriel de dimension 2 et de base  $(f_{r_1}, f_{r_2})$ .
- Si une seule solution (double)  $r_0$ , l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel de dimension 2 et de base  $(f_{r_0}, t \mapsto t \cdot e^{r_0 \cdot t})$ .

2. Equation avec second membre de la forme d'une exponentielle polynômiale.

- On utilise la méthode de superposition des solutions avec les différentes fonctions exp. poly. :  $f_j(t) = P_j(t) \cdot e^{\alpha_j \cdot t}$
- Si  $\alpha_j$  est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :  $y_j = t^{m_j} \times e^{\alpha_j \cdot t} \cdot Q_j(t)$  où  $Q_j$  est un polynôme de même degré que  $P_j$ , et où  $m_j$  est la multiplicité de la racine.
- Sinon on cherche une solution de la forme :  $y_j = Q_j(t) \cdot e^{\alpha_j \cdot t}$ .