Familles sommables.

Données et notations :

- Pour tout ensemble A, $\mathcal{P}_f(A)$ désigne l'ensemble des parties finies de A.
- Si F est une partie finie, on note $\sum\limits_{x \in F} x$ la somme des élément de F.
- Si F est une famille finie $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ de $\mathbb{K}$, on a : $\sum\limits_{x\in F} x = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha$.

1 Définition des familles sommables.

1.1 Définition.

Définition 1 *La famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est dite sommable si* $\left\{ \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{J}} |u_\alpha| \ / \ \mathbb{J} \in \mathcal{P}_f(\mathbb{I}) \right\}$ *est majorée.*

1.2 Propriétés.

Proposition 1

(i) *Invariance par bijection :* *Soient I_1 et I_2, 2 ensembles, $\varphi : I_1 \longrightarrow I_2$ bijective et $(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$.*
On pose pour $\beta \in I_2$: $v_\beta = u_{\varphi(\beta)}$.
$(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$ *est sommable si et seulement si* $(v_\beta)_{\beta\in I_1}$ *est sommable.*

(ii) *Support dénombrable :* *Si $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable, le support de cette famille : $\{\alpha \in \mathbb{I} \ / \ u_\alpha \neq 0\}$ est soit fini, soit dénombrable.*

(iii) *Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.*

Remarque *Si $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est la réunion disjointe des deux sous-familles $(u_\alpha)_{\alpha\in I_1}$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$, $I = I_1 \cup I_2$, alors $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si $(u_\alpha)_{\alpha\in I_1}$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$ le sont.*

1.3 Exemples importants.

- $\mathbb{I} = \mathbb{N}$: Pour $F \in \mathcal{P}_f(F)$, on choisit N tel que : $F \subset [0,N]$. On a alors : $\sum\limits_{n\in F} |u_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} |u_n|$.
- $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$: On choisit N tel que : $F \subset [-N,N]$.
- $\mathbb{I} = \mathbb{N}^2$: On choisit N et M tels que : $F \subset [0,N] \times [0,M]$. On a alors : $\sum\limits_{n\in F} |u_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} \sum\limits_{m=0}^{M} |u_{n,m}|$.

Dans chaque cas, on essaiera de majorer les sommes à l'aide de séries convergentes.

1.4 Règle de domination.

Proposition 2 *Soient $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ et $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ 2 familles telles que :* $|u_\alpha| \leqslant |v_\alpha|$.
Si la famille des $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable, alors celle des $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ l'est aussi.

2 Sommabilité et somme des suites de réels positifs.

Théorème 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

1. *Sommabilité.* *Les conditions suivantes sont équivalentes.*
   (a) *La suite (u_n) est sommable.*
   (b) *La série de terme général (u_n) converge.*
   (c) *Commutative convergence :* *Pout toute bijection, $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$ est convergente.*
   (d) *Paquets croissants :* *Il existe une suite $(F_p)_{p\geqslant 0}$ de parties finies de $\mathbb{N}$ croissante (pour l'inclusion) et recouvrant $\mathbb{N}$ $\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p = \mathbb{N}\right)$ telle que la suite de terme général : $s_p = \sum_{n\in F_p} u_n$ est convergente.*
   (e) *Sommation par paquets finis :* *Il existe une partition $(\Lambda_p)_{p\geqslant 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que la série de terme général $v_p = \sum_{n\in\Lambda_p} u_n$ converge.*
2. *Somme.* *Si (u_n) est sommable, le réel positif $S = \underset{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})}{Sup} \sum_{n\in F} u_n$ a les propriétés :*
   (a) *Calcul par bijection :* *Pour toute $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective, S est la somme totale de la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$.*
   (b) *Calcul par paquets croissants :* *Pour toute suite $(F_p)_{p\geqslant 0}$ vérifiant les conditions précédentes, on a : $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n\in F_p} u_n = S$.*
   (c) *Calcul de sommation par paquets finis :* *Pour toute partition $(\Lambda_p)_{p\geqslant 0}$ de $\mathbb{N}$ en parties finies, on a : $\sum_{p=0}^{+\infty} v_p = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in\Lambda_p} u_n\right) = S$.*

Définition 2 $S = \underset{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})}{Sup} \sum_{n\in F} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$: *somme (totale) de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

3 Définition et calcul de la somme d'une famille sommable.

3.1 Définitions.

Rappel *Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose :* $\begin{cases} x^+ = \max(x,0) \\ x^- = \max(-x,0) \end{cases}$. *On a :* $\begin{cases} x = x^+ - x^- \\ |x| = x^+ + x^- \end{cases}$ *et* $\begin{cases} x^+ = \dfrac{|x|+x}{2} \\ x^- = \dfrac{|x|-x}{2} \end{cases}$.

Proposition 3 *Soit $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ une famille de réels pour (i), de complexes pour (ii).*
(i) *La famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si les 2 sous-familles $({u_\alpha}^+)$ et $({u_\alpha}^-)$ le sont.*
(ii) *La famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si les 2 sous-familles $(\mathrm{Re}\,(u_\alpha))$ et $(\mathrm{Im}(u_\alpha))$ aussi.*

Définition 3 *Pour $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$, une famille sommable de réels positifs avec $\mathbb{I}$ dénombrable.*

On pose : $\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$, *où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}$ est une bijection quelconque.*

Définition 4 *Pour $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}} \in \mathbb{R}$ sommable, on pose :* $\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} {u_\alpha}^+ - \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} {u_\alpha}^-$.

Définition 5 *Pour $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}} \in \mathbb{C}$ sommable, on pose :* $\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} \mathrm{Re}\,(u_\alpha) + i\cdot\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} \mathrm{Im}(u_\alpha)$.

3.2 Calcul de la somme d'une famille sommable.

Théorème 2 *Soient $\mathbb{I}$ dénombrable et $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ une famille sommable de $\mathbb{K}$.*

1. *Calcul par série :* *Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}$, la série de terme général $(u_{\varphi(n)})$ est absolument convergente, et on a :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha$.
2. *Calcul par paquets croissants :* *Pour tout recouvrement de $\mathbb{I}$ par une suite (F_p) croissante de parties finies, la suite de terme général $s_p = \displaystyle\sum_{\alpha\in F_p} u_\alpha$ converge vers $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha$.*
3. *Calcul par paquets finis :* *Pour toute partition de $\mathbb{I}$ en une famille dénombrable de parties finies (Λ_p), la série de terme général $v_p = \displaystyle\sum_{\alpha\in\Lambda_p} u_\alpha$ est absolument convergente et on a :* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} v_p = \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha$.

3.3 Propriétés de la somme d'une famille sommable.

Théorème 3 *(i) Opérations linéaires :* *L'ensemble des familles sommables $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ de $\mathbb{K}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{I}}$.*

(ii) Majoration : *Si $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable et si qqsα, $|v_\alpha| \leqslant |u_\alpha|$, alors $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable et* $\displaystyle\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} v_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} |v_\alpha| \leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{I}} |u_\alpha|$.

(iii) Partition finie de $\mathbb{I}$: *On suppose $\mathbb{I} = I_1 \cup \cdots \cup I_p$ et $\forall\ i \neq j$, $I_j \cap I_i = \emptyset$.*
La famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si les p sous-familles $(u_\alpha)_{\alpha\in I_k}$ le sont.
On a alors : $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{\alpha\in I_1} u_\alpha + \cdots + \sum_{\alpha\in I_p} u_\alpha$.

(iv) Invariance par bijection : *Soit $\varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{J}$ bijective, la famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si la famille des $(v_\beta)_{\beta\in\mathbb{J}}$ est sommable. On a alors :* $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{\beta\in\mathbb{J}} v_\beta$.

4 Cas particuliers pour $\mathbb{I}$.

4.1 $\mathbb{I} = \mathbb{N}$.

Théorème 4 *La famille $(u_n)_{n\in N}$ est sommable si et seulement si la série de terme général (u_n) est absolument convergente. On a alors :* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n . s$

Corollaire *Toute série absolument convergente est commutativement convergente, ie. si la série de terme général (u_n) est absolument convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$ est absolument convergente. On a :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

4.2 $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$.

Théorème 5 *La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries de termes généraux $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(u_{-n})_{n>1}$ sont absolument convergentes. On a alors :* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{-n})$.

4.3 $\mathbb{I} = \mathbb{N}^2$.

Théorème 6 *La suite double $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{n,p})_{p\geqslant 0}$ est absolument convergente et si la série de terme général $\sigma_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ est convergente.*

Théorème 7 *On suppose $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ non-nulle et sommable, on a alors :*

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k-n}\right)$$

5 Application aux séries produits.

Théorème 8 *Si les séries de termes généraux* (u_n) *et* (v_n) *sont absolues convergentes, alors la série produit de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}$ *est absolument convergente.* *On a :* $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.

6 Complément : Sommation par paquets quelconques.

Théorème 9 *Soit* $\mathbb{I}$, *un ensemble dénombrable et* $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$ *partition de* $\mathbb{I}$, *où les* Λ_n *sont finis ou dénombrables.*

1. *La famille* $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ *est sommable* *si et seulement si* $\forall\ n$ *la famille* $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_n}$ *l'est et si la série de terme général* $\sigma_n = \sum_{\alpha\in\Lambda_n} |u_\alpha|$ *est convergente.*
2. *Si la famille est sommable, on a :* $\sum_{\alpha\in\mathbb{I}} u_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\alpha\in\Lambda_n} u_\alpha\right)$.