

Espaces euclidiens et hermitiens.

1 Généralités.

1.1 Espaces euclidiens, hermitiens.

Déf. 1 Un espace euclidien (resp. hermitien) est un espace préhilbertien réel (resp. complexe) de dimension finie.

1.2 Représentation des formes linéaires.

Théorème 1 Pour toute forme linéaire $l \in E^*$, il existe un unique vecteur $\vec{a} \in E$ tel que : $\forall \vec{v} \in E, l(\vec{v}) = \langle \vec{a} | \vec{v} \rangle$. De plus, on a : $\|l\| = \|\vec{a}\|$.

1.3 Existence et utilisation des bases orthonormales.

Théorème 2 Tout espace préhilbertien de dimension finie admet des bases orthonormales (il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à n'importe quelle base).

Théorème 3 (Représentation dans une base orthonormale) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, on a :

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{e}_j | \vec{x} \rangle \cdot \vec{e}_j, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \vec{e}_j | \vec{x} \rangle|^2, \quad \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \vec{x} | \vec{e}_j \rangle \cdot \langle \vec{e}_j | \vec{y} \rangle.$$

Théorème 4 (Matrice d'un endomorphisme en base orthonormale) Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale. on a : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = (\langle \vec{e}_i | u(\vec{e}_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Corollaire En particulier, on a : $Tr(u) = \sum_{i=1}^n \langle \vec{e}_i | u(\vec{e}_i) \rangle$.

Rem. Un endomorphisme trigonalisable d'un espace préhilbertien de dimension finie est trigonalisable dans une base orthonormale.

1.4 Propriété des sev.

Théorème 5 (Orthogonal) Soit F un sev de E , on a : $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Prop. 1 (Base orthonormale incomplète) Soit (e_1, \dots, e_p) un système orthonormal du sev F de E avec $\dim_{\mathbb{K}} F = r$, alors : $r \geq p$ et il existe (e_{p+1}, \dots, e_r) tel que (e_1, \dots, e_r) soit une base orthonormale de F .

1.5 Changement de base orthonormale.

1.5.1 Caractérisation des bases orthonormales.

Déf. 2 Une matrice est dite :

- orthogonale si ${}^t P \cdot P = P \cdot {}^t P = I_n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- unitaire si ${}^t \overline{P} \cdot P = P \cdot {}^t \overline{P} = I_n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 6 Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormale de E , \mathcal{B} une base quelconque de E et P la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{B} est orthonormale.
- (ii) P est orthogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
- (iii) Les colonnes de P forment une base orthonormale de \mathbb{K}^n pour le produit scalaire canonique.
- (iv) Les lignes de P forment une base orthonormale de \mathbb{K}^n pour le produit scalaire canonique.

1.6 Groupe orthogonal - spécial orthogonal / Unitaire - spécial unitaire.

Théorème 7 (i) L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonales est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

- (ii) Toute matrice orthogonale est de déterminant ± 1 .
- (iii) L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de déterminant 1 est un sous groupe distingué de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 8 (i) L'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ des $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaires est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

- (ii) Toute matrice unitaire P vérifie : $|\det P| = 1$.
- (iii) L'ensemble $\mathcal{SU}_n(\mathbb{C})$ des matrices unitaires de déterminant 1 est un sous groupe distingué de $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$.

Rem. 1. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SU}_n(\mathbb{C})$ sont compactes.

2. $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{SU}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

1.7 Matrices.

1.7.1 Produit scalaire canonique.

- Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\langle X | Y \rangle = {}^t \bar{X} \cdot Y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot y_i$.
- Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t \bar{A} \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \bar{a}_{i,j} \cdot b_{i,j}$.

1.7.2 Expression du produit matriciel.

$$\text{Soient } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad ({}^t \bar{A} \cdot B)_{i,j} = \langle \text{col}_i(A) | \text{col}_j(B) \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{A}_{k,i} \cdot B_{k,j}.$$

1.7.3 Matrices symétriques - antisymétriques.

Prop. 2 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ie. l'application $A \mapsto {}^t A$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1.7.4 Matrices hermitiennes.

Déf. 3 - $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si : ${}^t \bar{H} = H$.

- $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est antihermitienne si : ${}^t \bar{H} = -H$.

Prop. 3 (i) A antihermitienne $\iff i \cdot A$ hermitienne.

(ii) L'ensemble $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes est un sous- \mathbb{R} -ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_n(\mathbb{C})) = n^2$.
De plus, on a : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \oplus_{\mathbb{R}} i \cdot \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

2 Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes remarquables.

2.1 Définition et existence de l'adjoint.

Théorème 9 (i) Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Il existe un unique endomorphisme u^* , appelé adjoint de u tel que :
 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \langle u(\vec{x}) | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | u^*(\vec{y}) \rangle$, ou $\langle \vec{y} | u(\vec{x}) \rangle = \langle u^*(\vec{y}) | \vec{x} \rangle$.

(ii) Dans toute base orthonormale \mathcal{B} , on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$.

2.2 Propriétés de l'adjonction.

Théorème 10 (i) L'application d'adjonction $\theta : \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \\ u \longmapsto u^* \end{pmatrix}$ vérifie : $(u + \lambda \cdot v)^* = u^* + \bar{\lambda} \cdot v^*$,

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*, \quad (Id)^* = Id, \quad \text{et} \quad u^{**} = u.$$

(ii) $\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on a : $Sp_{\mathbb{K}}(u^*) = \{\bar{\lambda} / \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)\}$. Plus précisément, si $\chi_u = (-1)^n \cdot (X^n + \alpha_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + \alpha_0)$, alors $\chi_{u^*} = (-1)^n \cdot (X^n + \bar{\alpha}_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_0)$.

(iii) On a : $\text{Ker}(u^* - \bar{\lambda} \cdot Id) = (\text{Im}(u - \lambda \cdot Id))^{\perp}$, et $\text{Im}(u^* - \bar{\lambda} \cdot Id) = (\text{Ker}(u - \lambda \cdot Id))^{\perp}$.

(iv) Un sev F de E est stable par u si et seulement si F^{\perp} est stable par u^* .

Rem. 1. De (i) découle : $\left(\sum_{j=0}^d \alpha_j \cdot u^j \right)^* = \sum_{j=0}^d \bar{\alpha}_j \cdot (u^*)^j$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\chi_u^* = \chi_u$ et $Sp(u^*) = Sp(u)$.

2.3 Endomorphismes remarquables.

2.3.1 Autoadjoint.

Déf. 4 $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est autoadjoint si $u^* = u$.

Rem. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on dit aussi symétrique (resp. hermitien).

Théorème 11 (Caractérisation) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est autoadjoint, ie. $u^* = u$.

(ii) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle = \langle u(\vec{x}) | \vec{y} \rangle$.

(iii) La matrice A de u dans une base orthonormale vérifie : ${}^t \bar{A} = A$.

2.3.2 Orthogonal.

Déf. 5 u est orthogonal si : $u \circ u^* = u^* \circ u = Id$.

Théorème 12 (Caractérisation) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est orthogonal, ie. $u \circ u^* = u^* \circ u = Id$.

(ii) u conserve le produit scalaire, ie. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle u(\vec{x}) | u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.

(iii) u est une isométrie, ie. $\forall \vec{x} \in E$, $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

(iv) La matrice de u dans une base orthonormale est orthogonale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.3.3 Normal (HP).

Déf. 6 u est normal si : $u \circ u^* = u^* \circ u$.

2.4 Théorème spectral.

Théorème 13 Soit u un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ préhilbertien (donc de dimension finie), alors :

(i) χ_u est à coefficients réels, et il est scindé sur \mathbb{R} .

(ii) u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux ,

(iii) ou encore : u est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles.

2.5 Applications aux matrices.

Théorème 14 1. Toute matrice réelle A est orthogonalement diagonalisable.

2. Toute matrice hermitienne complexe H est unitairement diagonalisable à valeurs propres réelles.