

## Calcul Différentiel

Dans toute la suite,  $E$  est de dimension  $n$  de base  $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$  et  $F$  est de dimension  $p$  de base  $(\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_p)$ .

### 1 Définitions

**DÉFINITION 1 : Fonctions coordonnées**

Soient  $f : U \rightarrow F$  et  $\mathcal{B} = (\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_p)$  une base de  $F$ , on peut décomposer  $f$  selon ses fonctions coordonnées :

$$\forall M \in U, \quad f(M) = \sum_{j=1}^p f_j(M) \cdot \vec{\eta}_j, \quad f_j = \eta_j^* \circ f$$

$f$  est continue en  $M_0$  si et seulement si toutes les fonctions coordonnées  $f_j$  le sont (vrai pour "différentiable").

**DÉFINITION 2 : Dérivée selon  $\vec{v}$ , Dérivées partielles**

1. Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$ , où  $U$  est un ouvert. La dérivée de  $f$  en  $A$  selon  $\vec{v} \in U$  est, lorsqu'elle existe :

$$f'_{\vec{v}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t \cdot \vec{v}) - f(A)}{t}$$

2. Soit  $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$  une base de  $E$ . La  $j^{\text{e}}$  dérivée partielle de  $f$  en  $A$  est :

$$f'_{\vec{\varepsilon}_j}(A) = (\partial_j f)(A) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) \text{ en base canonique}$$

**DÉFINITION 3 : Différentielle**

On se place dans le cas où  $E$  et  $F$  sont des evn de dimension finie. Alors  $f$  est différentiable en  $A$  si et seulement si il existe  $l \in \mathcal{L}(E, F)$ , noté  $df_A(\vec{v})$ , tel que :

$$\forall H \in E, A + H \in U : \quad f(A + H) = f(A) + l(H) + o(\|H\|)$$

ie.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  tel que  $\forall H \in E, \|H\| \leq \eta \implies \|f(A + H) - f(A) - l(H)\| \leq \varepsilon \cdot \|H\|$ .

**PROPRIÉTÉ 1 :**

Si  $f$  est différentiable en  $A$ , alors  $f$  admet des dérivées en  $A$  selon tout vecteur, et  $\forall \vec{v} \in E$ ,

$$f'_{\vec{v}}(A) = df_A(\vec{v})$$

Si  $f$  est différentiable en  $A$ , alors  $f$  est continue en  $A$ .

On a de plus :

$$df_A \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{\varepsilon}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\partial_i f)(A) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(A) \text{ en b.c}$$

Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}$ , alors  $f$  est différentiable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$ , et on a :  $f'(a) = df_a(1)$ , ou encore :  $df_a(h) = h \cdot f'(a)$ .

**PROPRIÉTÉ 2 :**

– Soit  $l$  une application linéaire.  $l$  est différentiable en tout point, et sa différentielle est elle-même.

– Soit  $B$  une application bilinéaire.  $B$  est différentiable en tout point, et sa différentielle est

$$dB_{(a_1, a_2)}(h_1, h_2) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2)$$

–  $d(\det)_{(I_n)} = \text{Tr}$ .

– Soit  $Q$  une forme quadratique, et  $\varphi$  sa forme polaire associée.  $Q$  est différentiable en tout point, et sa différentielle est :  $dQ_a = 2 \cdot \varphi(a, \cdot)$  (on décompose :  $Q = \varphi \circ \sigma$ , où  $\sigma : \vec{v} \mapsto (\vec{v}, \vec{v})$ ).

## 2 Propriétés

### THÉORÈME 1 : Composition

Si  $f$  est différentiable en  $A$ , et si  $g$  est différentiable en  $B = f(A)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $A$  et :

$$d(g \circ f)_A = dg_{f(A)} \circ df_A$$

Sous les mêmes conditions, on a alors que  $g \circ f$  est dérivable en  $A$  selon tout vecteur  $\vec{v}$  et que :

$$(g \circ f)'_{\vec{v}}(A) = d(g \circ f)_A(\vec{v}) = dg_B(f'_{\vec{v}}(A))$$

$f$  est différentiable en  $A$  si et seulement si toutes les fonctions coordonnées  $f_j$  le sont, et :

$$df_A(h) = \sum_{j=1}^n df_{jA}(h) \cdot \vec{\varepsilon}_j.$$

### DÉFINITION 4 : Matrice Jacobienne

( $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ , et  $f : E \rightarrow F$ )

C'est la matrice  $\text{Mat}(df_A) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Ses colonnes sont les vecteurs  $\frac{\partial f_A}{\partial x_j}(A)$ , et donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\text{Jac}(f)(A))_{(i,j)} = (\partial_j f_i)(A) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(A)$$

Les matrices Jacobiennes sont **linéaires** et vérifient :

$$(\text{Jac}(g \circ f))(A) = (\text{Jac}(g))(B) \times (\text{Jac}(f))(A) \quad , \quad \text{où } B = f(A)$$

Cas particulier où  $n = p = 2$ , on a :  $(\text{Jac } f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ , où  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ .

Avec les mêmes notations, la formule de la chaîne :

$$(\partial_j(g \circ f))(A) = \sum_{k=1}^p (\partial_k g)(B) \times (\partial_j f_k)(A).$$

Dans le cas particulier où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , on obtient que :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x_1, \dots, x_n)) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

## 3 Continuité, dérivabilité, caractère $C^k$

### PROPRIÉTÉ 3 : Un lemme important

Soient  $f : U \rightarrow F$ , et  $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$  une base de  $E$ . On suppose que  $f$  admet des dérivées  $\partial_{j, \mathcal{B}}(f)$  dans un voisinage du point  $A \in U$  et que ces fonctions sont continues en  $A$ , alors  $f$  est différentiable en  $A$  et sa différentielle est :  $df_A : \vec{v} \mapsto \sum_{j=1}^n x_j \cdot (\partial_{j, \mathcal{B}} f)(A)$ .

### THÉORÈME 2 : Caractère $C^1$

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$ ,  $f$  est  $C^1$  si et seulement si :

- (i)  $\forall \vec{v}$ ,  $f$  admet en tout point  $A$  une dérivée  $f'_{\vec{v}}(A)$ , et  $A \mapsto f'_{\vec{v}}(A)$  est continue.
- (ii) Il existe une base telle que  $f$  admette en tout point des dérivées partielles et telle que  $\forall j$ ,  $A \mapsto \partial_j f$  est continue.
- (iii) idem avec "pour toute base ...".
- (iv)  $f$  est différentiable en tout point et  $A \mapsto df_A$  est continue.

On généralise à :  $f$  est  $\mathcal{C}^p$  si et seulement si il existe une base telle que  $f$  admette des dérivées partielles à tous les ordres et ces dérivées partielles sont continues.

**THÉORÈME 3 : Lemme de Schwarz**

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ , pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , et pour tout  $A \in U$ , on a :

$$[\partial_i(\partial_j f)](A) = [\partial_j(\partial_i f)](A)$$

Remarque : De la formule de la chaîne découle qu'une composée de fonctions  $\mathcal{C}^k$  est  $\mathcal{C}^k$ .

**DÉFINITION 5 :  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes**

Soit  $f : U \rightarrow V$ , où  $U, V$  sont des ouverts.  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si et seulement si :

- (i)  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  ; (ii)  $f$  est bijective ; (iii)  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^k$  de  $V \rightarrow U$

**PROPRIÉTÉ 4 :**

La réciproque d'un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme est aussi un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme et on a :  $d(f^{-1})_B = (df_{f^{-1}(B)})^{-1}$ . Par ailleurs, la composée de deux  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphismes est aussi un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

**THÉORÈME 4 : d'inversion locale**

Soit  $f : U \rightarrow F \in \mathcal{C}^1$ . On suppose que  $df_A$  est un isomorphisme, alors il existe  $\omega \in \mathcal{V}_o(A)$  dans  $U$  et  $\omega' \in \mathcal{V}_o(B = f(A))$  dans  $F$  tels que  $f|_\omega : \omega \rightarrow \omega'$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Si  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ , alors  $f|_\omega$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

**THÉORÈME 5 : de l'application ouverte**

Soit  $f : U \rightarrow F \in \mathcal{C}^1$  telle que pour tout  $A \in U$ ,  $df_A$  soit un isomorphisme, alors  $f$  est une application ouverte, i.e. l'image par  $f$  d'un ouvert de  $U$  est un ouvert de  $F$ .

**THÉORÈME 6 : d'inversion globale**

$f : U \rightarrow V$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si et seulement si :

- (i)  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ .  
(ii)  $f(U) = V$   
(iii)  $\forall A \in U$ ,  $df_A \in \mathcal{L}(U, V)$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $F$ , i.e. le jacobien de  $f$  ne s'annule pas sur  $U$ .  
(iv)  $f$  est injective.

## 4 Gradient et Accroissements Finis

**DÉFINITION 6 : Gradient**

Soient  $E$  un espace vectoriel muni du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ,  $f : E \rightarrow F$ , et  $A \in E$ . Le gradient de  $f$  en  $A$  est l'unique vecteur vérifiant :

$$df_A(\vec{h}) = \langle (\vec{\nabla} f)(A) | \vec{h} \rangle \quad \forall \vec{h} \in E$$

En base orthonormale et pour  $f \in \mathcal{C}^1$ , il est donné par :

$$(\vec{\nabla} f)(A) = \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(A) \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

**THÉORÈME 7 : Accroissements Finis sur un convexe**

Soit  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}^1$ , et  $(A, B) \in U^2$  tels que  $[A, B] \in U$ . Alors on a :

$$f(B) - f(A) = \int_0^1 (df)_{(tB+(1-t)A)}(B-A) dt = \int_0^1 \left\langle \vec{\nabla} f_{tB+(1-t)A} \mid B-A \right\rangle dt$$

**THÉORÈME 8 : Inégalité des Accroissements finis sur un convexe**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\forall C \in [A, B]$ ,  $\|df_C\| \leq M$ , ou  $\|\vec{\nabla} f_C\| \leq M$ , alors :

$$|f(B) - f(A)| \leq M \cdot \|B - A\|$$

Il en découle que si  $U$  est un ouvert convexe et si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , alors :

$f$  est constante si et seulement si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $A \in U$ ,  $df_A = 0$ .

## 5 Pratique : Recherche d'extrema locaux

On se servira de la **forme quadratique Hessienne** de  $f$  en  $A$  définie par :

$$\sum_{i,j=1}^n (\partial_i \partial_j f)(A) \cdot h_i \cdot h_j$$

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Si  $f$  présente un extremum local en  $A \in E$ , alors on a nécessairement  $df_A \equiv 0$ , et en particulier, si  $\dim E = n$ , on a  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\partial_i f) \equiv 0$ . **Les points où sont atteints les extrema sont donc soit les points situés sur la frontière de  $E$ , soit les points critiques où  $df_M$  s'annule.**

On commence donc par rechercher ces points critiques, et on utilise le théorème suivant :

**THÉORÈME 9 :**

On se place en un point critique  $A$ , et on note  $q$  la forme Hessienne en ce point.

- Si  $f$  présente un **minimum local**, alors  $q$  est **positive**
- Si  $f$  présente un **maximum local**, alors  $q$  est **négative**
- Si  $q$  est **définie positive**, alors  $f$  présente un **minimum local strict**
- Si  $q$  est **définie négative**, alors  $f$  présente un **maximum local strict**

Penser à utiliser la matrice de la forme Hessienne, en étudiant les signes de son déterminant et de sa trace (c.f ALGÈBRE...). C'est particulièrement agréable en dimension 2.