

Le théorème de convergence monotone

1 Rappel : le théorème de convergence dominée

THÉORÈME 1 : convergence dominée

Soient $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{C}$ des applications telles que :

- Les f_n et f sont continues par morceaux sur I .
- (f_n) converge simplement vers f sur I .
- Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable telle que :

$$\forall n, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors : les f_n et f sont intégrables et :
$$\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

THÉORÈME 2 : Intégration terme à terme

Soit $u_n, S : I \rightarrow \mathbb{C}$ des applications telles que :

- Les u_n et S sont continues par morceaux sur I .
- La série de terme général (u_n) converge simplement vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur I .
- La série de terme général $\left(\int_I |u_n(t)| dt \right)$ converge.

Alors : f est intégrable et :
$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t) dt.$$

2 Le théorème de convergence monotone

2.1 Lemme : "convergence par dessous"

LEMME 1 : Converge par dessous

Soient $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux telles que :

- Pour tout n , f_n est intégrable sur I .
- Pour tout $t \in I$, $0 \leq f_n(t) \leq f(t)$.
- (f_n) converge simplement vers f sur I .

Alors : f est intégrable si et seulement si la suite de terme général $\left(\int_I f_n(t) dt \right)$ converge.

On a même :

1. Si f est intégrable,
$$\left(\int_I f_n(t) dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$
2. Si f n'est pas intégrable,
$$\left(\int_I f_n(t) dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Démonstration :

1) On applique le théorème de convergence dominée avec $\varphi = f$.

2) Soit $A > 0$. Comme f n'est pas intégrable et que f est positive, on en déduit qu'il existe un segment $K = [a, b] \subset I$ tel que :
$$\int_K f(t) dt > A.$$

Sur K , le théorème de convergence dominée s'applique avec $\varphi = f$ qui est continue par morceaux sur K donc intégrable. D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K f_n(t) dt = \int_K f(t) dt > A.$$

Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, \int_K f_n(t) dt > A$.

Par positivité des f_n , on a alors : $\forall n \geq N, \int_I f_n(t) dt > A$. D'où le résultat.

2.2 Le théorème de convergence monotone

THÉORÈME 3 : convergence monotone

Soient $f_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues par morceaux telles que :

- Pour tout x , la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ en croissant (ie. convergence simple et monotone).
- Pour tout n , f_n est intégrable sur I .

Alors : f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_I f_n(t) dt\right)$ est majorée.

Dans ce cas, on a : $\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt$.

THÉORÈME 4 : Corollaire pour les séries

Soit (u_n) une suite de fonctions telle que :

- Pour tout n , u_n est positive, continue par morceaux et intégrable sur I .
- la série de terme général (u_n) converge simplement sur I vers S .
- S est continue par morceaux sur I .

Alors : S est intégrable si et seulement si la série de terme général $\left(\int_I u_n\right)$ converge.

Dans ce cas, on a : $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \int_I S(t) dt$.

Démonstration : C'est une conséquence du lemme de convergence par dessous.

- Si f est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique à la suite de terme général $f_n - f_0$ avec domination par $\varphi = f - f_0$ qui est intégrable. On a donc : $\left(\int_I (f_n - f_0)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f - f_0)$. D'où : $\left(\int_I f_n(t) dt\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt$.

- Réciproquement, supposons que la suite de terme général $\left(\int_I f_n(t) dt\right)$ soit convergente. On pose alors : $u_n = f_n - f_{n-1}$. Les u_n sont continues par morceaux, positives et la série de terme général (u_n) converge simplement vers $f - f_0$ car $\sum_{k=1}^n u_n = f_n - f_0$.

De plus, la série de terme général $\int_I |u_n(t)| dt$ converge car :

$$\sum_{n=1}^N \int_I |u_n(t)| dt = \sum_{n=1}^N \int_I u_n(t) dt = \int_I f_N(t) dt - \int_I f_0(t) dt$$

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et montre que $f - f_0$ est intégrable et que :

$$\int_I (f - f_0)(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I (f_n - f_{n-1})(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt - \int_I f_0(t) dt$$

Donc f est intégrable et : $\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt$.