

Équations différentielles

1 Équations différentielles non linéaires

1.1 Du premier ordre

Équation intégrale : pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ les conditions initiales, et (E) l'équation différentielle $y'(x) = f(y(x), x)$, φ est \mathcal{C}^1 et solution sur I au problème de Cauchy correspondant si et seulement si φ est **continu** et $\forall x \in I$:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\varphi(t), t) dt$$

1.2 Ordre r : théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations résolues

THÉORÈME 1 : *Théorème de Cauchy-Lipschitz*

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , où U est un ouvert. On considère $(E_r) : y^{(r)}(x) = f(y(x), \dots, y^{(r-1)}(x), x)$, et une condition initiale $(y_0, \dots, y_{r-1}, x_0)$.

- Alors il existe une unique solution maximale (I, φ) au problème de Cauchy ainsi défini.
- l'intervalle I est un ouvert de \mathbb{R} .
- Toute autre solution (J, Ψ) du même problème de Cauchy est restriction de (I, φ) .

2 Équations et systèmes d'équations linéaires

On note $(E_r) : x^{(r)}(t) = a_{r-1}(t) \cdot x^{(r-1)}(t) + \dots + a_0(t) \cdot x(t) + b(t)$, où $a_j : I \rightarrow \mathcal{L}_c(E)$, et $b : I \rightarrow E$ continue. Et on note (e_r) l'équation homogène associée.

2.1 Ensemble solution

THÉORÈME 2 : *Structure de l'ensemble des solutions*

1. L'ensemble $S_{E_r}(I)$ des solutions sur I à l'équation (E_r) est un **sous-espace affine de $\mathcal{C}^r(I, \mathbb{R})$**
2. L'ensemble des solutions de (e_r) sur I est un **sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^r(I, \mathbb{R})$** . De plus,

$$\forall t_0 \in I, \theta_0 : \left(\begin{array}{c} S_{e_r}(I) \longrightarrow E^r \\ \varphi \longmapsto (\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(r-1)}(t_0)) \end{array} \right) \text{ est un isomorphisme.}$$

D'autre part, on a aussi : $\dim_{\mathbb{K}}(S_{e_r}(I)) = r \times \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

2.2 Cas particulier des équations scalaires de degré 1

Soit $(E) : x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$, où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues, et (e) l'équation homogène associée.

THÉORÈME 3 :

1. La solution générale de (e) est $\varphi(t) = K \cdot e^{A(t)}$, où A est une primitive quelconque de a .

2. Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) : x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale qui est :

$$\varphi(t) = e^{A(t)} \cdot \left[\int_{t_0}^t b(s) \cdot e^{-A(s)} ds + x_0 \right], \quad \text{où } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

2.3 Théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires

On note $\mathcal{L}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes linéaires continus de \mathbb{R} .

THÉORÈME 4 : *Théorème de Cauchy à l'ordre r*

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{R} , E un Banach, $b : I \rightarrow E$ et $a_0, \dots, a_{r-1} : I \rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbb{R})$ toutes **continues**.
 $\forall t_0 \in I, (x_0, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^r$, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j(t) \cdot x^{(j)}(t) + b(t) \\ x^{(k)}(t_0) = x_k \quad \forall k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket \end{cases}$$

admet une **unique solution sur I** , qui est maximale. **Toute autre solution en est restriction.**

2.4 Systèmes fondamentaux de solutions & Wronskien

On se place dans \mathbb{R}^n , on note (e) une équation différentielle linéaire homogène, I un intervalle.

DÉFINITION 1 : *Système fondamental de solutions*

On appelle système fondamental de solutions de (e) sur I , une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de solutions formant une base de $S_e(I)$.

THÉORÈME 5 : *SFS : Définition et caractérisation*

Le système $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions si et seulement si $\forall t \in I, (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ **est une base de \mathbb{R}^n** , si et seulement si $\exists t \in I$ tel que $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ soit une base de \mathbb{R}^n

THÉORÈME 6 : *Wronskien d'un SFS*

Soit $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ un système de n solutions quelconques de (e). On appelle Wronskien de ce système $w(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$.

De là, $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est un SFS si et seulement si $\forall t \in I, w(t) \neq 0$, si et seulement si $\exists t \in I, w(t) \neq 0$.

3 Outils pour la pratique

3.1 Équations à coefficients constants

THÉORÈME 7 :

- $\forall u \in \mathcal{L}_c(E)$, l'unique solution du pb. de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E)$: $\begin{cases} f'(t) = u \circ f(t) \\ f(0) = Id_E \end{cases}$ est $\varphi_u : t \mapsto e^{t \cdot u} \in \mathcal{L}_c(E)$.
- $\left. \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{L}_c(E) \\ \forall \vec{v}_0 \in E \end{array} \right\}$, la solution du problème de Cauchy dans E $\begin{cases} \varphi'(t) = u \circ \varphi(t) \\ \varphi(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$ est : $\varphi(t) = e^{(t-t_0) \cdot u}(\vec{v}_0)$.

3.2 Variation de la constante : équation linéaire d'ordre 1

On considère l'équation différentielle $\mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{y}' + \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}(x)$

- ◇ **Résolution de l'ESSM :** on se place là où $a(x)$ ne s'annule pas et on résout ; les solutions sont donc en

$$y(x) = K \cdot \exp\left(\int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$$

- ◇ **Variation de la constante :** on recherche une solution en $y(t) = K(t) \cdot \exp\left(\int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$; en l'injectant dans l'équation différentielle on trouve :

$$K'(t) = \frac{c(t)}{\exp\left(\int^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)}$$

Une simple intégration donne $K(t)$, puis $y(t)$, mais **ATTENTION AUX CONSTANTES D'INTÉGRATION !**

3.3 Variation de la constante : équation linéaire d'ordre 2

On considère l'équation différentielle (E) : $a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = f(x)$

◇ **Résolution de l'ESSM** : on trouve tout d'abord un système fondamental de solutions.

Dans le cas d'une équation scalaire (a, b, c sont des constantes), on en trouve un en suivant cette méthode :

On résout l'équation caractéristique $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$ et on distingue les cas :

Deux racines, réelles ou complexes : Les solutions sont de la forme :

$$\alpha \cdot e^{r_1 x} + \beta \cdot e^{r_2 x} \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Une racine double : Les solutions sont de la forme $(\alpha x + \beta) \cdot e^{r x}$

Deux racines réelles : $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \bar{r}_1$; les solutions sont alors de la forme :

$$e^{\alpha x} \cdot (\lambda \cdot \cos(\beta x) + \mu \cdot \sin(\beta x))$$
, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On note par la suite $(x_1(t), x_2(t))$ le système fondamental en question.

◇ **Variation des constantes** : Pour résoudre l'équation (E), on pose $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + \mu(t) \cdot \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$.

En injectant dans l'équation différentielle compte tenu que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation homogène,

il vient :
$$\begin{cases} \lambda'(t) \cdot x_1(t) + \mu'(t) \cdot x_2(t) = 0 \\ \lambda'(t) \cdot x_1'(t) + \mu'(t) \cdot x_2'(t) = h(t) \end{cases}$$
 où h est le 2nd membre constant dans l'équation

résolue. On accède ainsi à $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$, puis on intègre... mais **ATTENTION AUX CONSTANTES D'INTÉGRATION!**

3.4 Utilisation de matrices : réduction, diagonalisation

3.4.1 Se ramener à une équation différentielle d'ordre 1

Dans le cas d'équations linéaires, on peut toujours se ramener à une équation **matricielle** différentielle

d'ordre 1. En posant $z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(x) \end{pmatrix}$, on a en effet :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ (0) & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & I_n \\ a_0(t) & \dots & \dots & \dots & a_{r-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(r-1)}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

CAS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE 2

$y''(x) = a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) + c(x)$, $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$.

Alors y est solution de l'équation si et seulement si :

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) + c(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}}_{B(x)}$$

Soit donc, si et seulement si $z'(x) = A(x) \cdot z(x) + B(x)$.

3.4.2 Cas où A est diagonalisable

Soit l'équation différentielle matricielle homogène d'ordre 1 à résoudre : $X'(t) = A \cdot X(t)$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

Alors, si A est diagonalisable, $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base de vecteurs propres de valeurs propres associées

$(\lambda_i)_{i \in [1;n]}$, la solution associée avec pour condition initiale $X(t_0) = \vec{X}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{v}_i$ est :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{v}_i$$

3.4.3 Une décomposition utile

On suppose que l'on peut décomposer A sous la forme $D + N$, où D est diagonale et N nilpotente d'indice p , avec de plus $N \cdot D = D \cdot N$. Alors la solution de $\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est :

$$X(t) = e^{(t-t_0) \cdot A} \cdot \vec{X}_0 = e^{(t-t_0) \cdot D} \cdot \left(\sum_{k=0}^p \frac{(t-t_0)^k \cdot N^k}{k!} \right) \cdot \vec{X}_0$$

CAS PARTICULIER D'UNE SEULE VALEUR PROPRE

Si A a une seule valeur propre dans \mathbb{C} , alors $\chi_A = (\lambda - X)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors que : $(A - \lambda \cdot I_n)^n = 0$.

En écrivant que $A = \lambda \cdot I_n + (A - \lambda \cdot I_n)$, on obtient que la solution du problème de Cauchy ci-dessus est :

$$X(t) = e^{\lambda \cdot (t-t_0)} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j \cdot (A - \lambda \cdot I_n)^j}{j!} \right) \cdot \vec{X}_0$$

3.4.4 Cas général

On suppose que l'on peut écrire $A = P \cdot R \cdot P^{-1}$. On pose alors $Y(t) = P^{-1} \cdot X(t)$. Puis on résout "en cascade".

4 Différents types d'équations différentielles

4.1 Equations de type Euler

Il s'agit d'équations scalaires de la forme :

$$t^r \cdot x^{(r)}(t) = (a_{r-1} t^{r-1}) \cdot x^{(r-1)}(t) + \dots + (a_1 t) \cdot x'(t) + (a_0) \cdot x(t) + b(t)$$

La seule chose à savoir est que si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - r + 1) = a_{r-1} [\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - r + 2)] + \dots + a_1 \cdot \alpha + a_0,$$

alors $\varphi : t \mapsto t^\alpha$ est solution de l'équation homogène associée à (E) .

En particulier, si l'équation caractéristique définie ci-dessus a r racines simples $\alpha_1 \dots \alpha_r$, alors la solution générale de l'équation homogène est $\sum_{j=1}^r c_j \cdot t^{\alpha_j}$.

Si α est racine de multiplicité $m \geq 2$, avec t^α on rajoute dans la base la famille $\ln(t) \cdot t^\alpha, \dots, (\ln(t))^{m-1} \cdot t^\alpha$.

4.2 Equations de type Newton

Ce sont des équations de la forme : $y'' = f(y)$.

Pour les résoudre (penser à la physique), on multiplie par y' ...

4.3 Equations de type Bernoulli

Ce sont des équations de la forme : $y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^p$.

Pour les résoudre, on divise par y^p , et on pose $z = \frac{1}{y^{p-1}}$.

4.4 Equations de type Ricatti

Ce sont des équations de la forme : $y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$.

Pour les résoudre, on cherche une solution particulière f , puis on pose $y = f + z$.

5 Diverses astuces

- D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ou bien une solution est identiquement nulle, ou bien elle n'est jamais nulle (et donc garde un signe constant).
- Prendre bien garde au fait que la méthode de variation des constante ne s'applique que pour des équations différentielles linéaires.
- Dans le cas d'utilisation de séries entières, ne pas oublier de préciser que le rayon de convergence est strictement positif.
- Pour montrer qu'une solution est paire ou périodique, on pose $g(x) = f(-x)$ ou $= f(x + T)$ et on vérifie que g est bien solution du même problème de Cauchy.