Familles sommables de scalaires

1 Généralités.

Définition 1 :

La famille $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si $\left\{\sum_{\alpha\in J} |u_\alpha| \ / \ J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{I})\right\}$ est majorée.

Théorème 1 : *Propriétés*

1. On a invariance par bijection (ie. changement de l'indice).
2. Si $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable, alors le support de cette famille est fini ou dénombrable.
3. Si $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est la réunion disjointe des deux sous-familles $(u_\alpha)_{\alpha\in I_1}$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$, $I = I_1 \cup I_2$, alors $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable si et seulement si $(u_\alpha)_{\alpha\in I_1}$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in I_2}$ le sont.

Théorème 2 : *Règle de domination*

Soient $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ et $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$, deux familles telles que : $\forall\ \alpha,\ |u_\alpha| \leq |v_\alpha|$.
Si la famille des $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ est sommable, alors celle des $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ l'est aussi.

2 Sommabilité et somme des suites de réels positifs.

Définition 2 :

$S = \sup\limits_{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} \sum\limits_{n\in F} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la somme (totale) de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justification dans le théorème suivant).

Théorème 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

(i) Sommabilité. Les conditions suivantes sont équivalentes.
- La suite (u_n) est sommable.
- La série de terme général (u_n) converge.
- Commutative convergence : Pout toute bijection, $\sigma\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$ est convergente.
- Paquets croissants : Il existe une suite $(F_p)_{p\geq 0}$ de parties finies de $\mathbb{N}$croissante (pour l'inclusion) et recouvrant $\mathbb{N}$telle que la suite de terme général : $s_p = \sum_{n\in F_p} u_n$ est convergente.
- Sommation par paquets finis : Il existe une partition $(\Lambda_p)_{p\geq 0}$ de $\mathbb{N}$telle que la série de terme général $v_p = \sum_{n\in\Lambda_p} u_n$ converge.

(ii) Somme. Si (u_n) est sommable, le réel positif $S = \sup\limits_{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} \sum\limits_{n\in F} u_n$ a les propriétés :
- Calcul par bijection : Pour toute $\sigma\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective, S est la somme totale de la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$.
- Calcul par paquets croissants : Pour toute suite $(F_p)_{p\geq 0}$ vérifiant les conditions précédentes, on a : $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n\in F_p} u_n = S$.
- Calcul de sommation par paquets finis : Pour toute partition $(\Lambda_p)_{p\geq 0}$ de $\mathbb{N}$en parties finies, on a : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} v_p = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n\in\Lambda_p} u_n\right) = S$.

Remarque

Cela se généralise aisément pour les familles sommables quelconques (somme des partie positive et négative de (u_α), ou des parties réelles et imaginaires).

3 Cas particuliers.

3.1 $\mathbb{I} = \mathbb{N}$.

Théorème 4 :

La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi. la série de terme général (u_n) est absolument convergente. On a alors : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Corollaire

Toute série absolument convergente est commutativement convergente, ie. si la série de terme général (u_n) est absolument convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{\sigma(n)})$ est absolument convergente. On a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

3.2 $\mathbb{I} = \mathbb{N}^2$.

Théorème 5 :

1. La suite double $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $(u_{n,p})_{p\geq 0}$ est absolument convergente et si la série de terme général $\sigma_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ est convergente.
2. On suppose $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ non-nulle et sommable, on a alors :

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k-n}\right)$$

Pratique

Pour démontrer la sommabilité, il vaut mieux se ramener à :

Comme $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2),\ \exists\ (N,P)\ /\ F \subset [0,N]\times[0,P]$

On a alors : $\displaystyle\sum_{(n,p)\in F} |u_{n,p}| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| \leq \sum_{n=0}^{N}\sigma_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n = cste$

4 Application aux séries produits.

Théorème 6 :

Si les séries de termes généraux (u_n) et (v_n) sont absolues convergentes, alors la série produit de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}$ est absolument convergente. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$.