

## Réduction des Endomorphismes

### 1 Polynôme minimal, Polynôme caractéristique

#### THÉORÈME 1 : Morphisme d'évaluation

$P$  un polynôme,  $Ev_u : P \mapsto P(u)$ , morphisme d'évaluation, est un **morphisme d'algèbre**.

- (i) En dimension finie, il est **non injectif**. Son noyau est donc un **idéal** engendré par un unique polynôme unitaire  $\Pi_u$ , appelé **polynôme minimal**.
- (ii)  $\text{Im}(Ev_u) = \mathbb{K}[u]$  est la sous-algèbre engendrée par  $u$ .
- (iii) Lorsque  $Ev_u$  est non-injectif (en particulier, en dimension finie),  $\mathbb{K}[u]$  est de dimension finie et :  $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\Pi_u)$ .
- (iv) En dimension infinie, il faut étudier l'injectivité de  $Ev_u$ .

#### DÉFINITION 1 : Polynôme Caractéristique $\chi_u$

$u$  un endomorphisme de matrice  $U$  en dimension  $n$ . On définit :  $\chi_u(X) = \det(U - X \cdot I_n)$ . Il est de degré exactement  $n$  et se développe sous la forme :

$$\chi_u(X) = (-1)^n \cdot [X^n - \text{Tr}(U) \cdot X^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \det(U)]$$

#### THÉORÈME 2 : Théorème de Décomposition des Noyaux

Soient  $P_1, P_2$  deux polynômes premiers entre eux ( $P_1 \wedge P_2 = 1 \in \mathbb{K}[X]$ ) et  $u \in \mathfrak{L}(E)$  un endomorphisme. Alors on a :

$$\text{Ker}((P_1 \times P_2)(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u))$$

Cette égalité se généralise par récurrence à  $n$  polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ .

#### THÉORÈME 3 : Théorème de Cayley-Hamilton

$\chi_u$  est un polynôme annulateur, *i.e*  $\Pi_u | \chi_u$ , et  $\chi_u(u) = 0 \in \mathfrak{L}(E)$

### 2 Éléments propres, caractérisations

#### THÉORÈME 4 : Caractérisation des Valeurs Propres

$\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de l'endomorphisme  $u$  de matrice associée  $U$  si et seulement si :

- (i)  $u - \lambda \cdot \text{Id}$  n'est pas injectif
- (ii)  $U - \lambda \cdot \text{Id} \notin \mathfrak{GL}_n(\mathbb{K})$
- (iii)  $\lambda$  est racine de  $\Pi_u$  si il existe
- (iv)  $\lambda$  est racine de  $\chi_u$

#### THÉORÈME 5 : Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

$u \in \mathfrak{L}(E)$  est diagonalisable si et seulement si :

- (i)  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ , où  $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$ .
- (ii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$
- (iii)  $E$  est engendré par des vecteurs propres de  $u$
- (iv)  $\exists P \in \mathfrak{GL}_n(\mathbb{K})$  tq  $U = PDP^{-1}$ ,  $D$  diagonale
- (v)  $\Pi_u$  est scindé à racines simples
- (vi)  $\exists P \in \mathbb{K}[X]$  non nul et scindé à racines simples tel que  $P(u) = 0$ .
- (vii)  $\chi_u$  est scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$ ,  $m_\lambda$  étant la multiplicité de la valeur propre.

#### REMARQUE

En particulier, si  $\chi_u$  est scindé à racines simples, alors  $u$  est diagonalisable.

#### THÉORÈME 6 : Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

$u$  est trigonalisable si et seulement si il existe pour  $u$  un drapeau stable de  $E$ , si et seulement si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  (ce qui est toujours vrai pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), si et seulement si  $\Pi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

### 3 Espaces stables.

#### THÉORÈME 7 :

Soit  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ , et  $F$  un sev de  $E$ ,  $u$ -stable . Considérons  $u|_F \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F)$ .

(i)  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u|_F$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  et  $E_{\lambda}(u) \cap F \neq \{0\}$ .

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , on a :  $E_{\lambda}(u|_F) = \text{Ker}(u|_F - \lambda \cdot \text{Id}_F) = E_{\lambda}(u) \cap F$ .

(ii)  $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ , on a :  $P(u|_F) = P(u)|_F$ .

(iii) Tout polynôme annulateur de  $u$  est annulateur de  $u|_F$ .

En particulier, si  $u$  admet un polynôme minimal  $\Pi_u$ , alors  $u|_F$  en admet un aussi et :  $\Pi_{u|_F} \mid \Pi_u$ .

(iv) Si  $E$  est de dimension finie,  $\chi_{u|_F} \mid \chi_u$ .

(v) Si  $u$  est diagonalisable, alors  $u|_F$  l'est aussi.

- ◇ **Endomorphismes commutants** : Soient  $u, v$  deux endomorphismes tels que  $u \circ v = v \circ u \Rightarrow$  **tout espace propre de l'un est stable par l'autre.**
- ◇ Soit  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$  diagonalisable.  $F$ , sev de  $E$ , est stable par  $u$  si et seulement si  $F$  est somme (directe) de sev des espaces propres  $E_{\lambda}(u)$  de  $u$ .
- ◇  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  **$E_u(\lambda)$  est stable par  $u$**

### 4 Projecteurs spectraux.

Soit  $\pi_i : E \rightarrow E_{\lambda_i}(u)$ , le projecteur spectral associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , c'est le projecteur sur  $E_{\lambda_i}(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{j=1}^p E_{\lambda_j}(u)$ .

#### THÉORÈME 8 :

1. Si  $u$  est diagonalisable de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  (2 à 2 distinctes), de projecteurs spectraux  $(\pi_1, \dots, \pi_p)$ , alors on a :

$$\forall (i, j), \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j} \cdot \pi_i, \quad \sum_{j=1}^p \pi_j = \text{Id}_E, \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j \cdot \pi_j = u$$

2. Supposons que  $(\pi_1, \dots, \pi_p)$  vérifient :  $\forall (i, j), \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j} \cdot \pi_i$  et  $\sum_{j=1}^p \pi_j = \text{Id}_E$ , alors pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ , on a :  $u = \sum_{j=1}^p \lambda_j \cdot E_{\lambda_j} \cdot \pi_j$  est diagonalisable, de valeurs propres les  $\lambda_i$ , et de sev propres les  $E_{\lambda}(u) = \bigoplus_{i/\lambda_i=\lambda} \text{Im}(\pi_i)$ .

Si  $u$  est diagonalisable, alors :  $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum P(\lambda_i) \cdot \pi_i$ .

### 5 Multiplicités.

#### DÉFINITION 2 :

1. **Multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda$  de  $u$**  : c'est la multiplicité de  $\lambda$  comme racine du polynôme caractéristique. ie.

$$m_{alg}(\lambda) = \max \{m / (X - \lambda)^m \mid \chi_u\}.$$

2. **Multiplicité géométrique de la valeur propre  $\lambda$**  : c'est la dimension de l'espace propre  $E_{\lambda}(u)$ . ie.  $m_{geom}(\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda}(u))$ .

#### THÉORÈME 9 :

$\forall \lambda$  valeur propre de  $u$ , on a :  $1 \leq m_{geom}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)$ .

### 6 Choses à savoir...

#### 6.1 Polynômes annulateurs

$P$  annulateur de  $u \Rightarrow$  Toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

$$P \text{ annulateur de } u \iff \Pi_u \mid P.$$

#### 6.2 Projecteurs

Soit  $u$  un projecteur ;  $X^2 - X = X(X - 1)$  est annulateur de  $u$ , donc  **$u$  est diagonalisable** car ce polynôme est scindé, et  $\text{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$

#### 6.3 Diagonalisation par blocs

$\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$ ,  $A_i = \text{Mat}(u|_{F_i})$ . Alors on a :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p \chi_{u|_{F_i}} ; \quad \text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^p \text{Tr}(u|_{F_i}) ; \quad \det(u) = \prod_{i=1}^p \det(u|_{F_i})$$

$$\Pi_u = \bigvee_{i=1}^p \Pi_{u|_{F_i}}$$

## 6.4 Indépendance des sev propres.

- Les sev. propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres différentes sont distincts : ie. si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$  sont des valeurs propres distinctes, alors la somme  $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$  est directe.
- Si  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, alors le système  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  est libre.

## 6.5 Théorème spectral.

### THÉORÈME 10 : Théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et ses espaces propres sont orthogonaux.

## 6.6 Quelques classiques...

- $M = \left( \begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $P(M) = \left( \begin{array}{c|c} P(A) & A \cdot P'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array} \right)$
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \text{Sp}(u) \Rightarrow P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$

## 7 Pratique

### 7.1 Diagonalisation

- ◇ **Cas général** : On calcule dans un premier temps le polynôme caractéristique. Si il n'est pas scindé, c'est raté. Si  $\chi_u$  est scindé, alors  **$u$  est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre associés aux racines du polynôme est exactement égale à la multiplicité de cette racine.**

Pour déterminer une base de diagonalisation, on détermine une base de chacun de ces espaces propres **en résolvant les équations aux éléments propres pour chaque valeur propre**, et leur union forme une base dans laquelle la matrice sera diagonale.

- ◇ **Utiliser la trace et le rang** :
  - Si  $rg(A) = 1$ , alors 0 est valeur propre d'ordre  $n - 1$ , et  $\lambda = \text{Tr}(A)$  est valeur propre d'ordre 1.
  - Si  $rg(A) = 2$ , alors 0 est valeur propre d'ordre  $n - 2$ , et  $\lambda + \mu = \text{Tr}(A)$ ,  $\lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2)$ ,  $\lambda \cdot \mu = \det(A)$ .
- ◇ **Utiliser des espaces stables** : on cherche alors les éléments propres sur ces réductions, et on remonte en utilisant la propriété :  $A$  est diagonalisable si et seulement si la restriction de  $u$  à chacun des  $F_k$  est diagonalisable.

- ◇ **Astuce** : toute matrice réelle de taille impaire admet au moins une valeur propre (car  $\chi_A$  est alors impair, et on applique le TVI).