

Les Séries de Fourier

Ce qui suit s'applique à des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ C^0 p.m, à sauts symétriques, et de période 2π ou T , plus généralement. On appelle \mathbb{E} l'ensemble de ces fonctions.

On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1 Coefficients de Fourier

On pose par convention $c_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$, mais $\forall n \geq 1$:

$$\begin{cases} c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} \cdot dt \\ a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) \cdot dt = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt = i \cdot (c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases}$$

2 Série de Fourier

La n^e somme partielle de la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \cdot e^{ik\omega t} = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cdot \cos(k\omega t) + b_k(f) \cdot \sin(k\omega t))$$

Les sommes partielles ont les mêmes propriétés de parité que f :

$$\begin{cases} f \text{ paire} \iff b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ f \text{ impaire} \iff a_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour obtenir la série de Fourier de f' :

$$(S_n(f))'(t) = S_n(f')(t) \quad \text{i.e.} \quad c_n(f') = in\omega \cdot c_n(f)$$

3 Les Théorèmes Incontournables

THÉORÈME 1 : Théorème de Parseval

$\forall f$ T -périodique et C^0 p.m (pas forcément à sauts symétriques), la famille des $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable, et on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2$$

THÉORÈME 2 : Théorème de Dirichlet

1. Si $f \in \mathbb{E}$ est de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cdot \cos(n\omega t) + b_n(f) \cdot \sin(n\omega t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Si f est à sauts symétriques, elle converge donc vers $f(t)$.

2. Si en plus des hypothèses précédentes, f est partout continue, alors la convergence est normale.

THÉORÈME 3 : Coefficients de Fourier et séries trigonométriques

Si une série de la forme $\sum c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ converge uniformément vers une fonction $f(x)$, alors la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la famille des coefficients $(c_n(f))$ de Fourier.

4 Noyaux de Dirichlet et Féjer

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \\ &= \begin{cases} 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi \cdot \mathbb{Z} \\ \frac{\sin((n+1/2) \cdot t)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) \\ &= \begin{cases} n+1 & \text{si } t \in 2\pi \cdot \mathbb{Z} \\ \frac{1}{n+1} \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2} \cdot t)^2}{\sin(t/2)^2} & \text{si } t \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) - S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (2f(x) - f(x+t) - f(x-t)) \cdot D_n(t) \cdot dt$$

5 Quelques compléments.

5.1 Théorème de Parseval à 2 fonctions.

THÉORÈME 4 :

Pour $(f, g) \in \mathbb{D}^2$, la famille des $(\overline{c_n(f)} \cdot c_n(g))$ est sommable, et on a :

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \overline{f(t)} \cdot g(t) \cdot dt = \langle f | g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} \cdot c_n(g)$$

5.2 Théorèmes de densité.

THÉORÈME 5 : *Théorème de Weierstrass trigonométrique*

L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathbb{E} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2 \cdot \pi \text{ périodiques, continue}\}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

THÉORÈME 6 :

L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathbb{E} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2 \cdot \pi \text{ périodiques, continue}\}$ pour $\|\cdot\|_2$.

5.3 Théorème de Riemann-Lebesgue restreint.

THÉORÈME 7 :

$$\forall f \in \mathbb{D}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$$

5.4 Injectivité.

THÉORÈME 8 :

L'application $\mathcal{F} : \begin{pmatrix} \mathbb{D} \rightarrow l_{2, \mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \\ f \mapsto (c_n(f)) \end{pmatrix}$ est \mathbb{C} -linéaire, injective, isométrique pour les produits scalaires usuels, mais non-surjective.