

Séries Numériques

1 Outils indispensables

1.1 Séries usuelles

- ◇ **Série géométrique** : $\sum a \cdot r^n$ converge $\iff a = 0$ ou $|r| < 1$
- ◇ **Séries de Riemann** : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$
- ◇ **Séries alternées** : (u_n) une série alternée; une condition suffisante de convergence : $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, et $|R_n^u| \leq |u_{n+1}|$.
- ◇ **Séries de Riemann alternées** : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 0$

1.2 Comparaison avec une intégrale

THÉORÈME 1 : Séries & Intégrales

Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\sum f(n)$ est convergente
- (ii) f est intégrable sur $[1; +\infty[$
- (iii) $\int_1^x f(t) \cdot dt$ a une limite finie en $+\infty$

Pour étudier une série de la forme $\sum f(n)$ où $|f(t)|$ décroît nécessairement vers 0), on peut utiliser l'encadrement :

$$\int_m^n f(t) \cdot dt \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^n f(t-1) \cdot dt = \int_{m-1}^{n-1} f(t) \cdot dt$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) \cdot dt \leq f(n)$$

APPLICATION INCONTOURNABLE

$$\text{EULER : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \Gamma \in \mathbb{R} \approx 0.577$$

1.3 Comparaison de Séries

THÉORÈME 2 : Comparaison de séries

$(u_n), (v_n)$ deux suites réelles **positives**.

- (i) Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n$, alors : $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge
- (ii) Si $u_n \underset{\infty}{\sim} o(v_n)$, alors : $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge
- (iii) Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

THÉORÈME 3 : Comparaison Logarithmique

(u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives**; on suppose que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors on a :

- (i) $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.
- (ii) $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

THÉORÈME 4 : Règle de d'Alembert

(u_n) une suite de réels **positive**, et **non lacunaire**. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$. Alors on a :

- (i) **Si $\ell < 1$** , $\sum u_n$ converge
- (ii) **Si $\ell > 1$** , $\sum v_n$ diverge
- (iii) **Si $\ell = 1$** , on ne peut rien dire *a priori*

THÉORÈME 5 : Règle de Riemann

(u_n) une suite de réelles **positifs**. Alors :

- (i) Si $n \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L > 0$, ($L = +\infty$ possible), alors $\sum u_n$ diverge.
- (ii) Si $n^2 \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < +\infty$, alors $\sum u_n$ converge.
- (iii) Si plus généralement $\exists \alpha > 1$ tel que $n^\alpha \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < \infty$, alors $\sum u_n$ converge.

1.4 Transformation d'Abel

PRATIQUE

$(a_k), (b_k)$ deux suites réelles; on pose $A_k = \sum_{j=0}^k a_j$ de sorte que $a_k = A_k - A_{k-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^M a_k \cdot b_k &= \sum_{k=N}^M A_{k+1} \cdot b_k - \sum_{k=N}^M A_k \cdot b_k \\ &\stackrel{k \leftrightarrow k+1}{=} \sum_{k=N+1}^{M+1} A_k \cdot b_{k-1} - \sum_{k=N}^M A_k \cdot b_k \\ &= [A_{M+1} \cdot b_M - A_N \cdot b_N] + \sum_{k=N+1}^M A_k \cdot (b_{k-1} - b_k) \end{aligned}$$

THÉORÈME 6 : Théorème d'Abel

Avec les notations ci-dessus, on suppose :

- (i) $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- (ii) La série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente
- (iii) La suite des sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée

Sous ces hypothèses, la série $\sum a_n \cdot b_n$ est convergente.

REMARQUE

Les hypothèses 1 et 2 sont réunies en particulier lorsque $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.

1.5 Séries produits.

THÉORÈME 7 :

Soient (u_n) et (v_n) les termes généraux de deux séries absolument convergentes, alors la série produit (de Cauchy) de terme général (w_n) tel que $w_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_{n-k}$ est absolument convergente, et on a : $\sum w_n = (\sum u_n) \cdot (\sum v_n)$.

2 Espaces de Banach.

PLAN DE LA DÉMONSTRATION DU CARACTÈRE COMPLET

Toute suite de Cauchy de l'espace $(E, \|\cdot\|)$ converge.

- (i) Construction d'une suite qui sera la limite. Pour cela, on se ramène à un autre espace (munie de $\|\cdot\|_{aux}$) que l'on sait complet.
- (ii) On vérifie que la limite pour $\|\cdot\|_{aux}$ ainsi obtenue est bien dans l'espace E considéré. Rappel : une suite de Cauchy est bornée.
- (iii) On vérifie enfin que la limite ainsi construite pour $\|\cdot\|_{aux}$ est limite pour la norme $\|\cdot\|$.

3 Liens suites-séries.

THÉORÈME 8 : Liens entre suites et séries

1. La suite (A_n) converge vers l si et seulement si $\sum (A_n - A_{n-1})$ converge.
2. $l > 0$ si et seulement si $\sum \left(\ln \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right) \right)$ converge.
3. (A_n) a un équivalent de la forme $C \cdot n^\beta$ si et seulement si $\sum \left(\ln \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} \right) + \beta \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$ converge.