Mathématiques – Analyse

Suites

1 Généralités.

Théorème 1 : *Théorème de la limite monotone*
Soit (u_n) une suite croissante, si (u_n) est majorée alors (u_n) converge vers $l = \sup\{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, sinon, elle tend vers $+\infty$.

Théorème 2 : *Suites adjacentes*
Si le couple (u_n, v_n) est adjacent ($(u_n) \nearrow$, $(v_n) \searrow$, $(u_n - v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

Théorème 3 : *Théorème des segments emboîtés*
Soit (I_n) une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$. (suites adjacentes)

Sur les ouverts denses

Si O_1 et O_2 sont deux ouverts denses de $\mathbb{R}$, alors $O_1 \cap O_2$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 : *Théorème de Baire*
Soit (O_n) une famille dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$, alors : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5 : *Lemme de Césaro*
Soit $(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $V_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. (cf. séries)

2 Valeurs d'adhérences.

Définition 1 :
l est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tendant vers l.

Compléments

(i) $\{\text{valeurs d'adhérences de } (u_n)\} = E_{\text{va de }(u_n)} = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k \ / \ k \geq N\}}$.

(ii) $\alpha \in E_{\text{va de }(u_n)}$ ssi. : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \ : \ |u_n - \alpha| < \varepsilon$.

Théorème 6 : *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
Toute suite complexe (ou réelle) **bornée** admet au moins une valeur d'adhérence.

Conséquence

Si une suite complexe (ou réelle) bornée, (u_n), admet une unique valeur d'adhérence α, alors $(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

3 Suites récurrentes réelles.

Théorème 7 : *Propriétés de monotonie*
Soit (U^a) telle que : $u_0 = a \in B$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ (f stabilisant B).

(i) Si f est croissante, alors la suite est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$.

(ii) Si f est décroissante, alors (u_{2n+1}) et (u_{2n}) sont monotones de sens inverse. (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

Théorème 8 : *Théorème du point fixe*
Soit B une fermé non-vide de $\mathbb{R}$ et $f \ : \ B \longrightarrow \mathbb{R}$ stabilisant B telle que f soit **contractante** (k-lip avec $k < 1$, équivalent à $\|f'\|_\infty < 1$), alors f admet un unique point fixe $l \in B$ et $\forall\, a \in B, (U^a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Remarque

U^a est définie ssi. : $\exists B$ telle que $u_0 \in B$ et B stable par f.

Complément : qualité des points fixes

(i) Si $|f'(l)| < 1$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $V = [l - \alpha, l + \alpha] \cap I$ est stable par f et vérifie : si $a \in V$, alors $(U^a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
l est un point attractif.

(ii) Si $|f'(l)| > 1$ et si $a \in I$ est tel que : $(U^a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, alors il existe N tel que $u_N = l$. l est un point répulsif.

Plan d'étude d'une suite récurrente

(i) Étudier les fonctions f et $f = g = Id$.

(ii) Représenter graphiquement (u_n) en repère orthonormal et $x \to x$, et quelques exemples de suites (u_n)

(iii) Déterminer les points fixes. Étudier la valeur de la dérivée (attractif, répulsif, rien...).

(iv) Essayer de découper B en intervalles stables sur lesquels on peut appliquer soit les propriétés de monotonie, soit le théorème du point fixe.

(v) Éventuellement, étudier $|u_n - l|$.

4 Suites de Cauchy.

Définition 2 :

Une suite (u_n) d'un evn. E est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n, p \geq N\ :\ \|u_n - u_p\| < \varepsilon$.

Théorème 9 :

suite convergente $\Longrightarrow$ de Cauchy / de Cauchy $\Longrightarrow$ bornée.
Cauchy + valeur d'adhérence α $\Longrightarrow$ $(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.
Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suite de Cauchy $\Longleftrightarrow$ suite convergente.