

Notions de Topologie

E désignera par la suite un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , sauf précision.

1 Définitions

1.1 Normes, distances et produits scalaires

DÉFINITION 1 : Norme, normes équivalentes

$N : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie les **quatre** conditions de :

- (i) **Positivité** : $\forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) \geq 0$
- (ii) **Homogénéité** : $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \vec{x}) = |\lambda| \cdot N(\vec{x})$
- (iii) **Inégalité Triangulaire** : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$
- (iv) **Séparation** : $\forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$

Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $\exists c_1, c_2 > 0$ tels que $c_1 \cdot N_1(\mathbf{x}) \leq N_2(\mathbf{x}) \leq c_2 \cdot N_1(\mathbf{x})$, si et seulement si N_1/N_2 et N_2/N_1 sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 2 : Produit Scalaire

$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est un produit scalaire si et seulement si il vérifie :

- (i) **La linéarité à droite** : $\forall v_1, v_2, v_3 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(v_1, v_2 + \lambda \cdot v_3) = \varphi(v_1, v_2) + \lambda \cdot \varphi(v_1, v_3)$
- (ii) φ est :
 - **symétrique** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, i.e $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
 - **hermitienne** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, i.e $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
- (iii) φ est **définie positive** : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) \in \mathbb{R}_+^*$

Un produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)}$

$N : x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est la **norme quadratique associée à φ** .

EXEMPLES DE NORMES À CONNAÎTRE

– Normes sur \mathbb{K}^n :

$$\| (x_1, \dots, x_n) \|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \| (x_1, \dots, x_n) \|_n = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^n \right)^{1/n}$$

$$\| (x_1, \dots, x_n) \|_\infty = \max_{j \in \{1, n\}} |x_j|$$

– Norme sur l'ensemble des fonctions continues sur un segment :

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| \cdot dt \quad \| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \cdot dt} \quad \| f \|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

Le produit scalaire associé à la norme quadratique $\| \cdot \|_2$ est

$$\varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b \overline{f(t)} \cdot g(t) \cdot dt$$

On étend facilement ces définitions aux espaces de suites sommables, de carré sommable, etc...

– Norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\text{Pour } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \| A \| = \sqrt{\text{Tr}(\overline{A} \times A)}$$

DÉFINITION 3 : Distance

$d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance sur l'ensemble A si elle vérifie les propriétés de :

- (i) **Positivité** : $d(x, y) \geq 0$
- (ii) **Symétrie** : $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) **Inégalité Triangulaire** : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- (iv) **Séparation** : $d(x, y) = 0 \iff x = y$

1.2 Vocabulaire topologique...

DÉFINITION 4 : Voisinage, Ouvert, Fermé...

(A, d) désigne un espace vectoriel normé.

- 1. **Voisinage de $a \in A$** : Partie V de A telle que $\exists r > 0$ vérifiant $\mathcal{B}_o(a, r) \subset V$
- 2. **Ouvert de A** : $\Omega \subset A$ est ouvert de A si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points, *i.e* si $\forall a \in \Omega, \exists r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r_a) \subset \Omega$
- 3. **Fermé de A** : Partie de A dont le complémentaire est un ouvert
- 4. **Topologie de A** : Ensemble des ouverts de A

DÉFINITION 5 : Intérieur, Adhérence, Frontière, Parties denses

On considère $X \subset A$.

- 1. **Intérieur de X** : $\overset{\circ}{X} = \{\cup \Omega \mid \Omega \text{ ouvert de } A, \Omega \subset X\}$. $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert de A inclus dans X .
- 2. **Adhérence de X** : $\overline{X} = \{\cap F \mid F \text{ fermé de } A, F \supset X\}$. \overline{X} est le plus petit fermé de A contenant X .
- 3. **Frontière de X** : $\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \overline{X} \cap (A \setminus \overset{\circ}{X})$. C'est un fermé.

1.3 Utilisation des suites

THÉORÈME 1 :

- 1. Soit (A, d) un espace vectoriel normé, $\ell \in A, X \subset A$. X est voisinage de ℓ **si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A tendant vers $\ell, \exists N, \forall n \geq N, u_n \in X$**
- 2. Soit $X \subset A, \ell \in \overset{\circ}{X} \iff X$ voisinage de $\ell \iff \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $\ell, \exists N, \forall n \geq N, u_n \in X$
- 3. $X \subset A$ est un ouvert si et seulement si $\forall \ell \in X, X \in \mathcal{V}(\ell)$, si et seulement si $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **convergeant dans X** , $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, u_n \in X$
- 4. Soit $X \subset A$ et $a \in A; a \in \overline{X} \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a
- 5. $X \subset A$ est dense dans A si et seulement si **tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X**

2 Propriétés des applications linéaires et bilinéaires

2.1 Applications Linéaires

THÉORÈME 2 : Continuité d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur \mathbb{K} , et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue sur E
- (ii) f est continue en $\vec{0} \in E$
- (iii) $\exists k \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \cdot \|x\|_E$
- (iv) f est bornée sur la boule unité de E
- (v) f est lipschitzienne

DÉFINITION 6 : Norme d'application linéaire continue

Pour $f : E \rightarrow F$ linéaire et continue, elle est définie par :

$$\|\cdot\| : f \mapsto \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f\|_F$$

Elle vérifie : $\|g \circ f\|_{E \rightarrow G} \leq \|g\|_{F \rightarrow G} \times \|f\|_{E \rightarrow F}$

2.2 Applications Bilinéaires

THÉORÈME 3 : Continuité d'une application bilinéaire

Soient E_1, E_2 et E_3 des espaces vectoriels normés, $B : E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) B est continue sur $E_1 \times E_2$
- (ii) B est continue en $(0, 0)$
- (iii) $\exists k \geq 0$ tel que $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \|B(x_1, x_2)\|_3 \leq k \cdot \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2$

3 Critère de Cauchy, complétude et compacité

3.1 Critère de Cauchy

DÉFINITION 7 : Suites de Cauchy, propriétés

Soit (A, d) un espace vectoriel normé; $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq p \geq N, \|u_n - u_p\| < \varepsilon$. On généralise facilement ce critère à des applications...

1. Toute suite convergente est de Cauchy
2. Toute suite de Cauchy est bornée et admet au plus une valeur d'adhérence
3. Une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence

3.2 Espace Complet ou de Banach

DÉFINITION 8 :

Un espace vectoriel normé est complet ou de Banach lorsque toute suite de Cauchy y est convergente.

THÉORÈME 4 : Sous espaces

Si A est complet, $X \subset A$ est complet si et seulement si X est une partie fermée de A .

MÉTHODE

Pour montrer qu'un espace est complet, la méthode est pratiquement toujours la même : on considère une suite bornée de Cauchy, puis en choisissant une distance appropriée on se ramène à un cas d'école : sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , que l'on sait complets : **on sait donc que la suite y convergera.**

On vérifie alors que **la limite ainsi construite appartient bien à l'espace souhaité**, puis on vérifie qu'elle est bien limite de la suite **pour la distance qu'on s'est originellement fixé.**

3.3 Théorèmes fondamentaux pour les espaces complets

cf. Théorèmes du Point fixe, des complets emboîtés sur le feuillet SUITES.

3.4 Compacité

DÉFINITION 9 :

Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet au moins une valeur d'adhérence.

Ainsi, tout espace métrique compact est complet, et toute partie compacte d'un espace métrique est fermée-bornée.

Enfin une partie d'un espace compact est compacte si et seulement si elle est fermée.

THÉORÈME 5 : Théorèmes fondamentaux

1. **Théorème des Bornes** : Si f est continue à valeurs réelles sur un compact, alors elle est bornée et atteint ses bornes
2. **Théorème de Heine** : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue
3. **Caractérisation de Borel-Lebesgue** : De tout recouvrement de K par une famille d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini : si $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_\alpha$, alors $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $A \subset \bigcup_{j=1}^p \mathcal{O}_{\alpha_j}$. Noter qu'un espace métrique est compact si et seulement si il vérifie cette propriété.

4 Cas de la dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

THÉORÈME 6 :

1. E est **complet**
2. Toute suite bornée de E admet **au moins une valeur d'adhérence**
3. Toute **suite de Cauchy converge**
4. Toute **série absolument convergente** de E est **convergente**
5. Une partie M de E est **compacte** si et seulement si elle est **fermée-bornée**
6. La norme $\|\cdot\|$ est atteinte

5 Connexité par arcs

DÉFINITION 10 : *Connexité par arcs*

Un espace vectoriel normé de dimension finie E est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un **chemin continu** γ de x à y , *i.e.* : $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

DÉFINITION 11 : *Convexité*

Soit $X \subset E$; X est convexe si pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $[x, y] \subset X$, où $[x, y] = \{t \cdot x + (1 - t) \cdot y \mid t \in [0, 1]\}$

THÉORÈME 7 : *Les Fondamentaux*

1. Tout **convexe** est **connexe par arcs**
2. Les connexes par arcs de \mathbb{R} sont les convexes, *i.e.* les **intervalles**
3. Un **produit cartésien** de connexes par arcs est connexe par arcs
4. L'**image continue** d'un connexe par arcs est connexe par arcs

6 Théorèmes Complémentaires

THÉORÈME 8 : *Théorème de Riesz*

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa **boule unité fermée** est un **compact**.

THÉORÈME 9 : *Théorème de Baire*

On se place dans un espace **complet** :

- (i) L'**intersection** d'une famille **dénombrable** d'**ouverts denses** est une partie **dense**.
- (ii) La **réunion** d'une famille **dénombrable** de **fermés d'intérieur vide** est une partie d'**intérieur vide**.