MATHÉMATIQUES – GÉOMÉTRIE

Etude des coniques

1 Définition

On appelle conique toute courbe d'un plan réel d'équation dans $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormal :

$$\Gamma(x,y) = a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

On pose alors $q(x,y) = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2$, c'est une forme quadratique (polynôme homogène de degré 2). On supposera dans la suite que q est non-nulle et que la conique est non-dégénérée.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la matrice de q dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2 Recherche de l'équation réduite d'une conique

2.1 Recherche d'un centre de symétrie

On cherche $\Omega(x_0, y_0)$ tel que l'équation de la conique dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soit de la forme :

$$a' \cdot x^2 + 2 \cdot b' \cdot x \cdot y + c' \cdot y^2 = 0$$

ie. il n'y a pas de termes en x et y.

THÉORÈME 1 :
$\Omega(x_0, y_0)$ est centre de symétrie $\iff$ $\overrightarrow{\text{grad}}\ F(x_0, y_0) = 0$ $\iff$ $\dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\Omega) = \dfrac{\partial F}{\partial y_0}(\Omega) = 0.$

Ceci se traduit par le système : $A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

On résout alors ce système linéaire.

2.2 Réduction de la forme quadratique

2.2.1 Cas d'une conique à centre

On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, le système $AX = -\dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ a une solution (unique). Donc Γ a un centre de symétrie Ω.

Par ailleurs, il existe une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans laquelle la matrice de q est diagonale, ie. telle que $q(\alpha \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta \cdot \overrightarrow{e_2}) = \lambda \cdot \alpha^2 + \mu \cdot \beta^2$.

L'équation de Γ dans le repère orthonormal $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est : $\lambda \cdot x^2 + \mu \cdot y^2 + F(\Omega) = 0$ (car dans $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'équation est $q(x,y) + F(\Omega) = 0$).

Remarque : $\lambda \cdot \mu = \det A = a \cdot c - b^2 \neq 0$.

On a alors la discussion suivante :
- Si $F(\Omega) \neq 0$, alors :
  - S'il y a deux valeurs propres de même signe, c'est une ellipse d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou le vide (ellipse imaginaire) dans le cas ou $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$.

- S'il y a deux valeurs propres de signes contraires, c'est une hyperbole de centre Ω d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

- Si $F(\Omega) = 0$, alors :
  - S'il y a deux valeurs propres de même signe, c'est le point Ω :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

    ou le vide (ellipse imaginaire) dans le cas ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.
  - S'il y a deux valeurs propres de signes contraires, c'est une hyperbole dégénérée en deux droites concourantes :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Y = \pm X \cdot \frac{b}{a}$$

2.2.2 Cas où q est dégénérée

On a $\det A = a \cdot c - b^2 = 0$. Dans ce cas, il n'y a pas de centre de symétrie.

On diagonalise A en base orthonormale, ie. on trouve $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ base orthonormale du plan. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que : $A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $q(x' \cdot \overrightarrow{e_1} + y' \cdot \overrightarrow{e_2}) = \lambda \cdot x'^2$.

L'équation de Γ dans $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est : $\lambda \cdot x^2 + d' \cdot x + e' \cdot y + f = 0$.

Discussion :

- Si $e' = 0$, alors : $\left(x + \frac{d'}{2 \cdot \lambda}\right)^2 = -f + \frac{d'^2}{2\lambda}$.
  - Si $\det < 0$, alors $\Gamma = \emptyset$.
  - Si $\det = 0$, alors Γ est une droite.
  - Si $\det > 0$, alors Γ est composé de deux droites parallèles.
- Si $e' \neq 0$, alors $\left(x + \frac{d'}{2 \cdot \lambda}\right)^2 + e'' \cdot y = cste$, $e'' \neq 0$. C'est une parabole.

3 Résumé

- Si q n'est pas dégénérée, on a un centre de symétrie. Si elle n'est pas dégénérée, la conique sera :
  - une ellipse si $\det A > 0$
  - une hyperbole si $\det A < 0$.
- Si q est dégénérée, en général c'est une parabole.

4 Les différentes coniques

4.1 Ellipse

Equation réduite centrée

L'équation réduite centrée d'une ellipse est : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

- $a > b > 0$ sont le demi grand axe et le demi petit axe. Les foyers sont alors sur (Ox).
- Sommets du grand axe : $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$.
- Sommets du petit axe : $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$.
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ est la distance du centre de l'ellipse aux foyers.
- $e = \dfrac{c}{a}$ est l'excentricité de l'ellipse.

Equation par foyer et directrice

Il s'agit de : $\dfrac{d(M,F)}{d(M,D)} = e, \quad$ où $e < 1$.

Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$, où l'un des foyers F est l'origine.
– p est le paramètre de l'ellipse. C'est la distance du foyer à la directrice correspondante.
– L'axe focal est (Ox).
– On trouve les autres paramètres en écrivant $\rho(0) + \rho(\pi) = 2a$, ce qui donne $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.

Parametrage

On a le parametrage : $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$.

4.2 Parabole

Equation réduite centrée

L'équation réduite centrée d'une parabole est : $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$.

- O est le sommet de la parabole, et (Ox) est l'axe de symétrie de la parabole.
- L'excentricité e vaut 1.
- L'unique foyer F est à la distance $\dfrac{p}{2}$ du sommet sur l'axe de symétrie
- La directrice est d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$.

Equation par foyer et directrice

Il s'agit de : $\dfrac{d(M,F)}{d(M,D)} = e = 1$. La distance du foyer à la directrice est p.

Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$, le foyer F étant l'origine.
– p est le paramètre de la parabole. C'est la distance du foyer à la directrice.
– L'axe de symétrie est (Ox), il contient le foyer.

Parametrage

On a le parametrage : $\begin{cases} x = p \cdot \dfrac{t^2}{2} \\ y = p \cdot t \cdot \sin t \end{cases}$.

4.3 Hyperbole

Equation réduite centrée

L'équation réduite centrée d'une hyperbole est : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

- Les foyers sont sur (Ox).
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, est la distance du centre aux foyers
- $e = \dfrac{c}{a}$, est l'excentricité.
- Les asymptotes sont d'équation : $y = \pm\dfrac{b}{a} \cdot x$.

Equation par foyer et directrice

Il s'agit de : $\dfrac{d(M, F)}{d(M, D)} = e > 1$.

Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$, un des foyers F étant l'origine.
– p est le paramètre de l'hyperbole. C'est la distance du foyer à la directrice correspondante.
– L'axe focal est (Ox).

Parametrage

On a le parametrage : $\begin{cases} x = \varepsilon \cdot a \cdot \operatorname{ch}\varphi \\ y = b \cdot \operatorname{sh}\varphi \end{cases}$, où $\varepsilon = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$, et où φ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'une des asymptotes, on a $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Hyperbole équilatère

On dit que l'hyperbole est équilatère si et seulement si les deux asymptotes sont orthogonales, ie. si $a = b$. Dans un repère dont les axes sont les asymptotes, l'équation est de la forme $x \cdot y = k$.