Exercices sur les espaces vectoriels normés

1 Exercices fondamentaux ou démonstrations à connaître

ÉNONCÉ :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et soit F un sev de E de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in E$ pour $\|\cdot\|$. Montrons que $x \in F$.

(x_n) est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$, donc pour $\|\cdot\|_F$ (norme induite sur F). Or comme F est de dimension finie, F est complet.

Par suite, (x_n) converge dans F, soit $l \in F$ sa limite.

Par unicité de la limite dans E, on a $x = l$. Donc $x \in F$.

ÉNONCÉ :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'un espace métrique (E, d), et soit l sa limite.
Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Il est ici plus facile de montrer la compacité au sens de Borel-Lebesgue.

Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de Γ par des ouverts de E. Comme $l \in \Gamma$, il existe $i_0 \in I$ tel que $l \in O_{i_0}$. De plus, O_{i_0} est ouvert, donc comme $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, on a :

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in O_{i_0}$$

Pour tout $n \leqslant N$, il existe $j_n \in I$ tel que $x_n \in O_{j_n}$.

Soit alors $J = \{j_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{i_0\}$. On a $\Gamma \subset \bigcup_{j\in J} O_j$, et comme J est fini, le résultat est prouvé.

ÉNONCÉ :

Soit E une partie non-vide d'un espace vectoriel normé, muni de la distance induite par la norme.
Prouver que : E compact $\Longleftrightarrow$ E complet et précompact.
Rappel : E est précompact si : $\forall \varepsilon > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$.

$\Longrightarrow$ clair.

$\Longleftarrow$ *Première démonstration :*

Supposons que E est complet et précompact. On va essayer d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Il existe un nombre fini de boules $B\left(a_j, \dfrac{1}{2}\right)$, $j \in \{1, \cdots, p\}$, recouvrant E.

Soit b_1 l'un des a_j tel que $B\left(b_1, \dfrac{1}{2}\right)$ contient des u_k pour une infinité d'indice k. On voit alors que, comme E, $B\left(b_1, \dfrac{1}{2}\right)$ est précompact.

Appliquons alors le raisonnement précédent en remplaçant E par $B\left(b_1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Il existe alors $b_2 \in B\left(b_1, \dfrac{1}{2}\right)$ tel que : $B\left(b_2, \dfrac{1}{2^2}\right) \cap B\left(b_1, \dfrac{1}{2}\right)$ contient des u_k pour une infinité d'indices k.

Par récurrence, on construit alors une suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de points de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} b_{n+1} \in B\left(b_n, \dfrac{1}{2^n}\right) \\ B\left(b_{n+1}, \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \cap B\left(b_n, \dfrac{1}{2^n}\right) \text{ contient } u_k \text{ pour une infinité d'indices } k. \end{cases}$$

On a : $d(b_n, b_{n+1}) < \dfrac{1}{2^n}$. On en déduit donc que la suite (b_n) est de Cauchy dans E. Comme E est complet, la suite (b_n) converge vers un certain point $b \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $B(b, \varepsilon)$ contient $B\left(b_n, \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour n assez grand, donc $B(b, \varepsilon)$ contient des u_k pour une infinité d'indices k. Donc la suite (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence b. Donc E est compact.

Deuxième démonstration (variante) :
Soit (E, d) un espace métrique, et soit (x_n) une suite de E. Il s'agit de montrer que l'on peut extraire de E une sous-suite convergente.

Comme E est précompact, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon 1. Il existe donc une de ces boules $B(a_0, 1)$ qui continent la valeur x_n pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0(n)})$ de (x_n) telle que pour tout n, $x_{\varphi_0(n)} \in B(a_0, 1)$.

Comme $B(a_0, 1) \subset E$, $B(a_0, 1)$ est aussi précompact. On peut donc recouvrir $B(a_0, 1)$ par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. Il existe donc une de ces boules, $B(a_1,\ 1/2)$ telle que $B(a_0,\ 1) \cap B(a_1,\ 1/2)$ contienne la valeur $x_{\varphi_0(n)}$ pour une infinité d'indices n. On peut donc construire une sous-suite $(x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)})$ de $(x_{\varphi_0(n)})$ telle que pour tout n, $x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)} \in B(a_0,\ 1) \cap B(a_1,\ 1/2)$.

En procédant par récurrence, on peut ainsi construire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une sous-suite $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et une boule $B(a_p,\ 1/2^p)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(n)} \in \bigcap_{0 \leqslant k \leqslant p} B\left(a_k,\ \frac{1}{2^k}\right)$$

Simplifions les notations en notant $\psi_p = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p$, pour tout p.

On va maintenant construire une sous-suite de (x_n) par la méthode du *procédé diagonal* :
– On choisit $x_{\zeta(0)} \in \{x_{\psi_0(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$.
– On choisit ensuite $x_{\zeta(1)} \in \{x_{\psi_1(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$, avec $\zeta(1) > \zeta(0)$.
– L'indice $\zeta(p)$ étant construit, on choisit $x_{\zeta(p+1)} \in \{\psi_{p+1}(n),\ n \in \mathbb{N}\}$, avec $\zeta(p+1) > \zeta(p)$.
Ainsi construite, la suite $(x_{\zeta(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de (x_n). Si maintenant $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant p$, on a :

$$x_{\zeta(q)} \in \{x_{\psi_q(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \{x_{\psi_p(n)},\ n \in \mathbb{N}\} \subset B\left(a_p,\ \frac{1}{2^p}\right)$$

Ceci prouve que : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \leqslant q$: $d(x_{\zeta(p)},\ x_{\zeta(q)}) \leqslant \dfrac{1}{2^{p-1}}$.

La suite $(x_{\zeta(p)})$ est donc de Cauchy. Comme E est complet, elle converge. D'où le résultat.

Énoncé :
Soit (E, d) un espace métrique, et soient K_1 et K_2 deux compacts de E.
Montrer l'existence de $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que : $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Rappel : Lorsque A est une partie quelconque de E, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue (car lipschitzienne).

En particulier, l'application $x \in K_1 \mapsto d(x, K_2)$ est continue. Comme K_1 est compact, elle est bornée et atteint ses bornes, donc :

$$\exists\, x_1 \in K_1, \quad d(x_1, K_2) = \inf_{x \in K_1} d(x, K_2) = d(K_1, K_2)$$

De même, l'application, $y \in K_2 \mapsto d(x_1, y)$ est continue. Comme K_2 est compact, on a :

$$\exists\, x_2 \in K_2, \quad d(x_1, x_2) = \inf_{y \in K_2} d(x_1, y) = d(x_1, K_2) = d(K_1, K_2$$

D'où le résultat.

Remarque :
En remplaçant K_1 par $\{x\}$, on voit qu'en particulier, si K_2 est compact :

$$\exists\, y \in K_2, \quad d(x, K_2) = d(x, y)$$

Énoncé :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et soit F un sev de E.
Soit $v \in E$. Montrer que : $\exists\, y \in F$ tel que $\|v - y\| = d(v, F)$.

On sait qu'il existe une suite (y_n) telle que $(d(v, y_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(v, F)$.
On en déduit donc que $(d(v, y_n))$ est bornée. Il existe donc M tel que $\forall n,\ d(v, y_n) \leqslant M$.

(y_n) est bornée dans F, donc d'après Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite de (y_n) convergente. Soit $\varphi\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(y_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in F$.

On a donc : $\left(d(v, y_{\varphi(n)})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(v, F)$.

Par unicité de la limite, on a donc : $d(v, F) = d(v, l)$.

Énoncé :

Le complémentaire d'un sev strict d'un evn est dense.

Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe une suite (x_n) dans le complémentaire de F (dans E) telle que $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

– *Premier cas :* si $x \notin F$, alors $x \in E \setminus F$. ok
– *Deuxième cas :* si $x \in F$, soit $v \in F$, et soit $x_n = x + \dfrac{v}{n}$. On a $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $x_n \notin F$

Théorème des fermés emboîtés :

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit (F_n) une suite de parties de E telle que :
– chaque F_n est fermée bornée et non-vide, de diamètre $d_n = \sup\{d(x, y)\ /\ (x, y) \in {F_n}^2\}$.
– la suite (F_n) décroît, ie. $\forall n,\ F_{n+1} \subset F_n$.
– la suite des diamètres (d_n) tend vers 0
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$.

Soit $x_n \in F_n$. La suite (x_n) est de Cauchy :
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_N \leqslant \varepsilon$. Par suite, $\forall n \geqslant m \geqslant N$, on a donc :

$$x_m \in F_m \subset F_N \quad \text{et} \quad x_n \in F_n \subset F_N \quad \text{d'où : } d(x_n, x_m) \leqslant d_N \leqslant \varepsilon$$

Comme (E, d) est complet, (x_n) converge vers un élément $a \in E$ qui est aussi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant p}$ du fermé F_p. Donc q est dans chacun des F_p, soit $a \in \displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p$.

D'autre part, si $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, a) \leqslant d_n$. Donc $x = a$.

On en déduit donc que : $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$.

Théorème de Riesz :

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension infinie. Montrer que la boule unité de E ne peut pas être incluse dans une réunion finie de boules de rayon 1. Qu'en conclure ?

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$, et de $(x_1,\ \ldots\ , x_n) \in E$ tels que $B_f(0, 1) \subset \displaystyle\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} B(x_i, 1)$. Notons $F = \operatorname{Vect}(x_1,\ \ldots\ , x_n)$. Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E$ tel que $x \notin F$. Comme F est un sev de dimension finie, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. Soit $x_0 = \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$.
On a $d(x_0, F) \leqslant \|x_0\| = 1$ et :

$$\forall x \in F, \quad \|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \|x - (y + \|x - y\| \cdot z)\| \geqslant \frac{d(x, F)}{\|x - y\|} = 1$$

Donc $d(x_0, F) = 1$.

Or $x_0 \in B_f(0,1)$, donc il existe i tel que $x_0 \in B(x_i, 1)$, de sorte que $d(x_0, x_i) < 1$, ce qui est absurde car $1 = d(x_0, F) \leqslant d(x_0, x_i)$.

Finalement, on a donc démontré que $B_f(0,1)$ n'est pas précompacte. En particulier, elle est non-compacte.

---

2 Théorème de Baire et applications

2.1 Théorème et démonstration

Énoncé du théorème :

Dans un espace métrique complet :
- l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est une partie dense
- ie. la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est une partie d'intérieur vide.

Considérons un espace métrique complet (E, d) et pout tout $n \in \mathbb{N}$, O_n un ouvert de E dense dans E. Montrons que $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, ie. que X coupe tout ouvert non-vide ω de E.

- construisons par récurrence une suite de boules fermés $B_n = B_f(x_, r_n)$ telles que :

$$B_0 \subset \omega \cap O_0, \quad \text{et } \forall n,\ 0 < r_n < \frac{1}{2^n} \text{ et } B_{n+1} \subset B_o(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$$

  - Pour $n = 0$: $\omega \cap O_0$ est un ouvert car O_0 et ω le sont, et il est non-vide car ω est dense. $\omega \cap O_0$ contient une boule ouvert $B_o(a, r)$ de rayon $r > 0$. Posons $r_0 = \min\left(1, \frac{r}{2}\right)$, $x_0 = a$ et $B_0 = B_f(x_0, r_0)$.
  B_0 vérifie bien $B_0 \subset \omega \cap O_0$ et $0 < r_0 \leqslant \frac{1}{2^0}$.
  - Supposons $B_0, \cdots, B_n$ construites. $B_o(x_n, r_n)$ est un ouvert non-vide de E, donc comme O_{n+1} est un ouvert dense : $B_o(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ est aussi un ouvert non-vide. Il contient donc une boule ouverte $B_o(a, r)$ de rayon $r > 0$.
  Posons $r_{n+1} = \min\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{r}{2}\right)$, $x_{n+1} = a$ et $B_{n+1} = B_f(x_{n+1}, r_{n+1})$.
  B_{n+1} vérifie bien $B_{n+1} \subset B_o(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ et $0 < r_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
- La suite (B_n) ainsi construite vérifie les hypothèses du théorèmes des fermés emboîtés. On en déduit donc que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est non-vide et donc que $\omega \cap \bigcap O_n$ qui le contient n'est pas vide.

2.2 Applications

Application importante :

Montrer que, quelle que soit la norme, $\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet.
Plus généralement, montrer que si E est un espace vectoriel admettant une base dénombrable, alors E n'est complet pour aucune norme.

1. Soit $F_n = \mathbb{R}_n[X]$, de dimension finie. Les F_n sont fermés dans $\mathbb{R}[X]$ quelle que soit la norme.
Supposons alors que $\mathbb{R}[X]$ est complet. Posons $O_n = \mathbb{R}[X] \setminus F_n$, c'est un ouvert. De plus, il est dense comme complémentaire d'un sev strict d'un evn dense.
D'après le théorème de Baire, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense.
Or $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}[X] \setminus F_n = \mathbb{R}[X] \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}[X] = \emptyset$. Ce qui est absurde.
2. Soit E un espace muni d'une norme quelconque, et soit (e_n) une base de E.
Posons $F_n = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. La suite (F_n) est une suite croissante de fermés non-vides de E, d'intérieurs vide (par l'absurde). Si E était complet, $\bigcup F_n$ serait d'intérieur vide. Or $\bigcup F_n = E$. Ce qui est absurde

Démonstration sans le théorème de Baire :

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E. Quitte à normaliser les e_n, on peut supposer que $\|e_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on va construire une série $\sum \lambda_n \cdot e_n$ absolument convergente, à partir d'une suite (λ_n) particulière, et on va prouver que $\sum \lambda_n \cdot e_n$ ne converge pas (intuitivement, si une telle série convergeait, sa somme serait combinaison linéaire infinie des e_n, ce qui est impossible dans un espace vectoriel par définition d'une base).

Notons $F_0 = \{0\}$ et $F_n = \mathrm{Vect}\,(e_1,\ \dots\ ,e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A partir de $\lambda_1 = 1/3$, on définit (λ_n) par :

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot d(\lambda_n \cdot e_n,\ F_{n-1}) = \frac{1}{3} \cdot \inf_{x \in F_{n-1}} \|\lambda_n \cdot e_n - x\|$$

Comme F_n est fermé (sev de dimension finie), on sait que $d(x, F_n) = 0$ ssi $x \in F_n$. Par récurrence, on en déduit que $\lambda_n > 0$.

Enfin, on a : $\lambda_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot d(\lambda_n \cdot e_n,\ F_{n-1}) \leqslant \dfrac{1}{3} \cdot \|\lambda_n \cdot e_n\| = \dfrac{\lambda_n}{3}$. On en déduit que $\lambda_n \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

La série $\sum \lambda_n \cdot e_n$ converge donc absolument. Si E est supposé complet, elle converge. Notons x sa limite.

Comme (e_n) est une base de E, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in F_n$. Ainsi $y = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \cdot e_k = x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \in F_n$.

Donc :

$$3 \cdot \lambda_{n+2} = d(\lambda_{n+1} \cdot e_{n+1},\ F_n) \leqslant \|\lambda_{n+1} \cdot e_{n+1} - y\| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} \lambda_k \leqslant \lambda_{n+2} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} \cdot \lambda_{n+2}$$

ce qui est absurde car $\lambda_{n+2} \neq 0$. L'espace métrique E n'est donc pas complet.

---

3 Exercices divers sur les espaces vectoriels normés

ÉNONCÉ :

Soit E une partie non-vide d'un evn, munie de la distance $d(x, y) = \|x-y\|$. Montrer que tout ouvert est réunion dénombrables de fermés.

Soit F un fermé non-vide de E. On a donc alors : $x \in F \Longleftrightarrow d(x, F) = 0$.
La fonction $\varphi\ :\ x \longrightarrow d(x, F)$ est continue et vérifie même : $|d(x, F) - d(x', F)| \leqslant d(x, x')$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in E\ /\ d(x, F) < \dfrac{1}{n}\}$ est un ouvert de E.
On a alors : $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{x \in E\ /\ d(x, F) = 0\} = F$.

Ainsi tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts. En passant au complémentaire, on a alors que tout ouvert est réunion dénombrable de fermés.

ÉNONCÉ :

Soit E un evn, et soient $A,\ B$ deux fermés disjoints non-vides de E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$, et $B \subset V$.

De même que précédemment, la fonction $x \longrightarrow d(x, A)$ est continue.
Comme A est fermé, on a : $x \in A \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$.
Soit $f\ :\ \begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x, A) - d(x, B) \end{pmatrix}$, f est continue.

Posons alors $U = f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $V = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$. U et V sont deux ouverts disjoints.
Soit $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$. De plus, $x \notin B$, donc $d(x, B) > 0$. Par conséquent : $x \in A \Longrightarrow f(x) > 0$.
De même, $x \in V \Longrightarrow f(x) < 0$. Donc $A \subset U$ et $B \subset V$. D'où le résultat.

ÉNONCÉ :

Soit E un evn, et K un compact convexe de E.
Soit $f\ :\ K \longrightarrow K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Soit $a \in K$, et soit $f_n\ :\ \begin{pmatrix} K \longrightarrow K \\ x \longmapsto \dfrac{1}{n} \cdot f(a) + (1 - \dfrac{1}{n}) \cdot f(x) \end{pmatrix}$. $\forall n \geqslant 1$, f_n est continue sur K et prend ses valeurs dans K. K est compact, donc il est complet pour la métrique induite par celle de E.

$\forall n \geqslant 1,\ \forall (x,y) \in K^2$, on a :

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \|x - y\|$$

f_n est donc $(1 - \dfrac{1}{n})$-contractante. Comme K est complet, f_n admet un unique point fixe x_n. On a donc alors que : $\forall n \geqslant 1,\ f_n(x_n) = x_n$.
D'autre part, $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in K$, on a : $\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \dfrac{1}{n} \cdot \|f(a)\| + \dfrac{1}{n} \cdot \|f(x)\|$.
f est continue sur le compact K, et donc y est bornée. On constate alors que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur K. K étant compact, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un certain $x \in K$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{\varphi(n)} = f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$.
On a : $\|x - f(x)\| \leqslant \|x - x_{\varphi(n)}\| + \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\| + \|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\|$.

On en déduit alors (facilement) que $x = f(x)$, et donc que f admet bien un point fixe.

Énoncé :

Soit E une partie non-vide et compacte d'un evn, munie de la distance $d(x,y) = \|x - y\|$ et soit $f\ :\ E \longrightarrow E$ telle que : $x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y)$.

1. Montrer alors que f admet un unique point fixe α dans E.
2. Soit $x_0 \in E$, on définit la suite (x_n) par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

1. L'unicité du point fixe (s'il existe) découle de l'inégalité. Notons aussi que f est lipschitzienne.
   Supposons que : $\forall a \in E,\ d(a, f(a)) > 0$.
   Soit $\varphi\ :\ \begin{pmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ a \longmapsto d(a, f(a)) \end{pmatrix}$, φ est continue sur le compact E. On en déduit donc qu'elle atteint sa borne inférieure. D'autre part, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, d'où : $\exists\, b \in E,\ \forall a \in E :\ 0 < d(b, f(b)) \leqslant d(a, f(a))$.
   Comme $0 < d(b, f(b))$, on a : $b \neq f(b)$. Par hypothèse, on a alors : $d(f(b), f^2(b)) \leqslant d(b, f(b))$.
   Ceci apporte une contradiction. On en déduit donc que f admet un point fixe α et qu'il est unique.
2. Posons $u_n = d(\alpha, x_n)$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} = \alpha$, alors $u_n = u_{n_0} = \alpha$ pour tout $n \geqslant n_0$, et le résultat est évident.
   Sinon : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = d(f(\alpha), f(x_n)) < d(\alpha, x_n) = u_n$. Donc la suite (x_n) décroît strictement. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Soit l sa limite. Montrons que $l = 0$
   Supposons que $l > 0$. Comme (u_n) décroît, on a $u_n \geqslant l$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, (x_n) est une suite de compact E, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Notons β la limite de cette dernière. On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\alpha, x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, \beta) = l$. De plus ; comme f est continue, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = d(\alpha, f(\beta))$.
   Cette dernière assertion est une absurdité puisque :

   $$d(\alpha, f(\beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = l \quad \text{et} \quad \forall n,\ d(\alpha, f(x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, x_{\varphi(n)+1}) \geqslant l$$

   On doit donc avoir $l = 0$. D'où le résultat.

Énoncé :

Donner une CNS pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ soit la boule unité fermée d'une norme.

Les propriétés géométriques de la boule unité sont : elle est compacte, convexe, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non-vide. Montrons que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

Soit donc A une partie de $\mathbb{R}^n$ qui soit compacte, convexe, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non-vide. On définit la jauge de A en posant : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \inf\{\lambda > 0\ /\ \dfrac{x}{\lambda} \in A\} \in \mathbb{R}_+$.

Dégageons alors les propriétés de p.

– La symétrie de A par rapport à 0 combinée au fait que A° est non-vide montre que $0 \in A^\circ$. Donc p est bien définie.

- A est fermé et borné, donc $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- On a aussi : $\forall n \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha > 0,\ p(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot p(x)$.
- A étant symétrique par rapport à 0, on a : $\forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(\beta \cdot x) = |\beta| \cdot x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors on a $p(x) > 0$. Soit (λ_n) une suite strictement décroissante de réels positifs telle que $\lim \lambda_n = p(x)$. La définition de $p(x)$ et la convexité de A montrent alors que $\forall n,\ \dfrac{x}{\lambda_n} \in A$. A étant fermé, on a donc : $\dfrac{x}{p(x)} \in A$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ p(x) \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \in A$.
- Prouvons maintenant l'inégalité de convexité. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2$, A étant convexe, on a :
$$\frac{p(x)}{p(x)+p(y)} \cdot \frac{x}{p(x)} + \left(1 - \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\right) \cdot \frac{y}{p(y)} \in A$$
Donc : $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)} \in A$, et donc $p\left(\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) \leqslant 1$. D'où : $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Ainsi p définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle A est la boule unité fermée.

Énoncé :

Montrer que les boules ouvertes d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Soit E un evn, et soient $a \in E$ et $r > 0$. Il s'agit de montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{B}_o(a, r),\ [x, y] \subset \mathcal{B}_o(a, r)$.
Soient donc $(x, y) \in \mathcal{B}_o(a, r)$ et soit $t \in [0, 1]$, on a :
$$d(a,\ t \cdot x + (1-t) \cdot y) = \|t \cdot x + (1-t) \cdot y - a\| = \|t \cdot x + (1-t) \cdot y - (t \cdot a + (1-t) \cdot a)\|$$
On a donc : $d(a,\ t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leqslant t \cdot \|x - a\| + (1-t) \cdot \|y - a\| < t \cdot r + (1-t) \cdot t = r$.
Ce qui montre que $[x, y] \subset \mathcal{B}_o(a, r)$.

Énoncé :

A est une partie d'un evn E. Soit $a \in \overline{A}$, et soit l'application $f\ :\ A \longrightarrow F$. On suppose que $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$ (a est un point isolé de A). Montrer que f est continue en a.

Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$. Or il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, \alpha) \subset V$.
Donc, $\forall x \in A,\ d(x, a) < \alpha \Longrightarrow x = a$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\forall x \in a,\ \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow x = a \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
Ce qui montre que f est continue en a.

Énoncé :

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $l\ :\ E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue et non-nulle. Soit enfin $H = \operatorname{Ker} l$.

1. Prouver que : $\forall x \in E,\ d(x, H) = \inf\limits_{y \in H} (\|x - y\|) = \dfrac{|l(x)|}{|||l|||}$.
2. Soit $x \in E \setminus H$. Prouver que $d(x, H)$ est atteinte ssi $\exists\ u \neq 0\ /\ \dfrac{|l(x)|}{|||y||} = |||l|||$.

H est un fermé, donc $x \in H \iff d(x, H) = 0$.
On peut donc supposer que $x \in E \setminus H$. On a alors $H \oplus \mathbb{K}x = E$.
Comme H est un sev, on a : $|||l||| = \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{|l(y)|}{\|y\|} = \sup\limits_{z \in J,\ \alpha \in \mathbb{K}^*} \dfrac{|l(\alpha x + z)|}{\|\alpha x + z\|} = \sup\limits_{z \in H} \dfrac{|l(x)|}{\|x + z\|}$.
$u \mapsto \dfrac{1}{u} = f(u)$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc alors :
$$\sup_{z \in H} \left(f\left[\frac{\|x+z\|}{|l(x)|}\right]\right) = |||l||| = f\left[\inf_{z \in H}\left(\frac{\|x+z\|}{|l(x)|}\right)\right]$$
On a donc : $\dfrac{1}{|||l|||} = \inf\limits_{z \in H}\left(\dfrac{\|x+z\|}{|l(x)|}\right)$, où $\dfrac{|l(x)|}{\|l\|} = \inf\limits_{z \in H}(\|x + z\|) = d(x, H)$. D'où le 1)
D'autre part, $d(x, H)$ est atteinte ssi :
$\exists\ z \in H,\ \ d(x, H) = \|x - z\| \iff \exists\ z \in H,\ \|x - z\| = \dfrac{|l(x)|}{|||l|||} \iff \exists\ y \neq 0,\ \|y\| = \dfrac{|l(y)}{|||l|||}$. D'où le 2)

Énoncé :

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une application *injective.*
Prouver que : f est continue $\iff$ pour tout compact K de E, $f(K)$ est compact.
Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus f injective ?

La condition nécessaire est évidente, c'est du cours !

Passons à la condition suffisante. Soit $x \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers x. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

L'ensemble $K = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E, donc $K' = f(K)$ est compact.

Soit f la restriction de f à K. Comme f est injective, g est une bijection de K sur K'.

L'application $g^{-1} : K' \longrightarrow K$ est continue, car pour tout fermé F de K, F est compact donc $(g^{-1})^{-1}(F) = g(F)$ est compact, donc fermé. L'ensemble K' étant compact, $(g^{-1})^{-1} = g$ est continue. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$, ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. D'où le résultat.

Si f n'est pas injective, le résultat est faux. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application égale à 0 si $x < 0$ et égale à 1 si $x \geqslant 0$. $f(K)$ est compact pour tout compact K de $\mathbb{R}$, et pourtant f n'est pas continue.

Énoncé :

Soient E et F deux parties non-vides d'un espace vectoriel normé, et soit $f : E \longrightarrow F$.

$$\text{Montrer que : } \quad f \text{ est continue } \iff \forall A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Supposons f continue. Soit $A \subset E$, alors $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ est un fermé de E, qui contient A et donc aussi $\overline{A}$.
Ainsi, on a : $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, et donc : $f(\overline{A}) \subset f\left[f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right] \subset \overline{f(A)}$.

Supposons réciproquement que $\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Soit B un fermé de F, on a : $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left[f^{-1}(B)\right]} \subset \overline{B} = B$.
On a donc : $f^{-1}\left[f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right] \subset f^{-1}(B)$.
Or : $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left[f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right]$. Donc : $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$, et par suite $f^{-1}(B)$ est un fermé.
Donc f est continue.

Énoncé :

Soit E une partie non-vide compacte d'un espace vectoriel normé, muni de la distance induite par la norme.
Soit $f : E \longrightarrow E$, une isométrie (ie. $\forall (x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$).

1. Prouver alors que f est bijective.
2. Prouver que si E et F sont métriques compacts, si $f : E \longrightarrow F$, et $g : F \longrightarrow E$ sont deux isométries, alors f et g sont bijectives.

Soit $f : E \longrightarrow E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(f(x), f(y))$. f est donc continue.

Soit $x \in E$, on définit la suite (x_n) par $x_0 = x$ et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
Comme E est compact, on peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$.
Comme f est une isométrie, on a pour tout n : $d\left[f^{\varphi(n+1)}(x),\ f^{\varphi(n)}(x)\right] = d\left[f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),\ x_0\right]$.
On a : $f^{\varphi(n)}(x) = x_{\varphi(n)}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} d\left[x_{\varphi(n)},\ x_{\varphi(n+1)}\right] = 0$.
Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} d\left[x_0,\ f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)\right] = 0$.
Par suite, tout point de E est limite d'une suite sur $f(E)$. Donc $f(E)$ est compact, et est dense dans E, donc $f(E) = E$. Donc f est surjective.

Comme f est clairement injective, on en déduit que f est bijective.

Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ sont des isométries alors d'après ce qui précède $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives.
On en déduit alors que f et g sont injectives, surjectives et donc bijectives.

Énoncé :

Montrer qu'un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente.

Condition nécessaire :
Si $\sum \|u_n\|$ converge, alors la suite des sommes partielles (S_n) est de Cauchy car :

$$\forall p < q, \quad \|s_p - s_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\|$$

Comme E est complet, (S_n) converge, donc $\sum u_n$ converge
Condition suffisante :
Soit (S_n) une suite de Cauchy de E. D'après le critère de Cauchy, on a :
- $\exists\, \varphi(0) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant \varphi(0), \quad \|S_n - S_{\varphi(0)}\| \leqslant 1.$
- $\exists\, \varphi(1) > \varphi(0),\ \forall\, n \geqslant \varphi(1), \quad \|S_n - S_{\varphi(1)}\| \leqslant \dfrac{1}{2}.$
- $\exists\, \varphi(k-1) > \varphi(k),\ \forall\, n \geqslant \varphi(k), \quad \|S_n - S_{\varphi(k)}\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}.$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = S_{\varphi(k+1)} - S_{\varphi(k)}$. Par construction, $\|u_k\| \leqslant 2^{-k}$, donc $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(0)}$, donc $(S_{\varphi(n)})$ converge. Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge. D'où le résultat.