Exercices sur les suites et la topologie de $\mathbb{R}$

1 Grands classiques

ÉNONCÉ :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application.

1. Montrer que si f est continue, le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que toute suite bornée de réels admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.
3. On suppose que f est bornée et que son graphe est fermé. Montrer que f est continue.
4. Si l'on suppose simplement que le graphe de f est fermé, peut-on affirmer que f est continue.

1. Soit (M_n) une suite de points du graphe de f convergeant vers un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $M_n = (x_n, f(x_n))$. Ainsi $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. Mais comme f est continue, donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. D'après l'unicité de la limite, $b = f(a)$. Donc, (a, b) est un point du graphe de f. Ceci prouve que le graphe de f est fermé.
   Autre méthode : le graphe de f est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / y - f(x) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$, où F est continue.
2. Soit (x_n) une suite bornée de réels admettant une unique valeur d'adhérence notée a. Supposons que (x_n) ne converge pas vers a. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N,\ \|x_n - a\| \geqslant \varepsilon$.
   L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \|x_n - a\| \geqslant \varepsilon\}$ n'est donc pas majoré. C'est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On sait alors qu'il existe une unique bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ strictement croissante. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - a\| \geqslant \varepsilon$. La sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence notée b. Il existe $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(\psi(n))} - a\| \geqslant \varepsilon$. Donc, en passant à la limite, on obtient : $\|b - a\| \geqslant \varepsilon$. Mais $(x_{\varphi(\psi(n))})$ est aussi une suite extraite de la suite (x_n). Ainsi $b = a$, alors que $\|b - a\| > 0$.
   C'est impossible, donc $(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite convergeant vers a.
   Soit b une valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f(x_{\varphi(n)})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.
   $(x_{\varphi(n)},\ f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (a, b)$. Ainsi (a, b) est la limite d'une suite d'éléments du graphe de f, or ce dernier est fermé, donc (a, b) est un élément du graphe. Ainsi $b = f(a)$.
   La suite $(f(x_n))$ est bornée, donc elle admet au moins une valeur d'adhérence. Ce qui précède montre que cette valeur d'adhérence est unique et égale à $f(a)$. D'après la question précédente, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Ceci prouve que f est continue
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On définit ainsi une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $G = \{(x, \frac{1}{x}) \ / \ x \neq 0\}$. Soit $(x_n, \frac{1}{x_n})$ une suite de points G qui converge vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a = 0$, alors $|\frac{1}{x_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui faux, donc $a \neq 0$ et $b = \frac{1}{a}$. Ainsi G est fermé.
   Le graphe de f est égal $G \cup \{0\}$, donc il est fermé, alors que f n'est pas continue.

2 A propos des boules

2.1 Toute boule ouverte est ouverte :

Soient $x \in E$, et $r > 0$. Montrons que $\mathcal{B}(x, r)$ est ouverte.
Soit $y \in \mathcal{B}(x, r)$, posons $r' = \|x - y\|$. Soit $z \in \mathcal{B}(y,\ r - r')$, on a alors : $\|z - x\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\| < r$.
Donc $\mathcal{B}(y,\ r - r') \subset \mathcal{B}(x, r)$.

2.2 Toute boule fermée est fermée :

Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que $E \setminus \mathcal{B}_f(x,r)$ est ouverte.
Soit $y \in E\setminus\mathcal{B}_f(x,r)$, posons $r' = \|y-x\| > r$. D'où par inégalité triangulaire : $\mathcal{B}_o(y,r'-r) \subset E\setminus\mathcal{B}_f(x,r)$.

---

3 Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Énoncé :

1/ Soit G un sous-groupe non-nul de $\mathbb{R}$, alors :
– soit G est dense dans $\mathbb{R}$
– soit $\exists\, a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.
2/ Étudier la nature de $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$.

1/ Si G est monogène égal à $a\mathbb{Z}$ ($a > 0$), a est le plus petit entier strictement positif de G. Si G est dense dans $\mathbb{R}$, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'a pas de plus petit élément mais une borne inférieure nulle. Il est donc naturel d'introduire $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $a = \inf G_+$. Le réel $a \geqslant 0$ est bien défini car G_+ est non-vide et minoré. En effet, il existe $x \in G$ non-nul et donc x ou $-x$ est dans G_+, qui est minoré par 0.

- Supposons tout d'abord $a > 0$. Montrons que $a \in G$, puis que $G = a\mathbb{Z}$. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose $a \notin G$.

  Comme $a > 0$, on a $2 \cdot a > a$ et il existe $x \in G_+$ tel que $x < 2 \cdot a$. On a donc $a < x < 2 \cdot a$, puisque $a \notin G$. Il existe alors $y \in G_+$ tel que $y < x$. On a $a < y < x < 2 \cdot a$ et $x - y \in G$ et même $\in G_+$ (comme différence d'éléments de G). Or $x - y < a$, ce qui contredit la définition de a. Donc $a \in G$.

  Par conséquent le groupe engendré par a, $a\mathbb{Z}$, est inclus dans G. Réciproquement, soit $x \in G$ et $k = E\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Comme G est un groupe, le réel $x - k \cdot a$ est dans G. De plus, comme $k \leqslant \frac{x}{a} < k + 1$, il vérifie $0 \leqslant x - k \cdot a < a = \min G_+$. Nécessairement, $x - k \cdot a = 0$ et $x = k \cdot a \in a\mathbb{Z}$. Il en résulte donc que $G = a\mathbb{Z}$.

- Supposons maintenant que $a = 0$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$, ie. que G rencontre tout intervalle ouvert. Soit $I =]\alpha, \beta[$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $a = 0$, il existe un élément $g \in G$ tel que $0 < g < \beta - \alpha$. Le sous-groupe $g\mathbb{Z}$ engendré par g est inclus dans G et rencontre nécessairement I (sinon il existerait un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $I \subset]kg, (k+1)g[$ ce qui contredirait l'inégalité $g < \beta - \alpha$). Cela prouve la densité de G dans $\mathbb{R}$.

2/ Soit à étudier $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} \neq \{0\}$.
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Comme α et β sont dans G, on peut trouver $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\alpha = k \cdot a$ et $\beta = l \cdot a$. En faisant le rapport, on a alors $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons $\frac{\alpha}{\beta}$ rationnel. On peut alors écrire $\frac{\alpha}{\beta}$ sous la forme $\frac{k}{l}$ ($k \wedge l = 1$). On a alors : $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \beta \cdot \left(\frac{k}{l} \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\right) = \frac{\beta}{l} \cdot (k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}) = \frac{\beta}{l}\mathbb{Z}$, car k et l sont premiers entre eux.
Donc : si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, G est monogène, sinon G est dense dans $\mathbb{R}$.

---

4 Exercices divers

Énoncé :

Soit φ : $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, une bijection telle que la suite $\left(\dfrac{\varphi(n)}{n}\right)$ soit convergente vers λ.
Que dire alors de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(n)}{n}$?

Nous allons montrer que $\lambda = 1$.
Supposons tout d'abord $\lambda < 1$. Soit $k \in]\lambda; 1[$, alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ \varphi(n) \leqslant k \cdot n$.
$\forall n \geqslant n_0$, on a : $\mathrm{Card}\{\varphi(m)\ /\ n_0 \leqslant m \leqslant n\} = n - n_0 + 1$. On a donc :

$$\max\{\varphi(m)\ /\ n_0 \leqslant m \leqslant n\} \geqslant n - n_0$$

Par ailleurs, on a :

$$\max\{\varphi(m)\ /n_0 \leqslant m \leqslant n\} \leqslant \max\{k \cdot m\ /\ n_0 \leqslant m \leqslant n\} = k \cdot n$$

On a donc : $\forall n \geqslant n_0$, $n - n_0 \leqslant k \cdot n$. Ceci est absurde puisque $k < 1$. On a donc $\lambda \geqslant 1$.
Posons maintenant $u_n = \frac{\varphi(n)}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi^{-1}(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\varphi^{-1}(n)} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda$$

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varphi^{-1}(n)}{n} = \dfrac{1}{\lambda}$. D'après ce qui précède, on a : $\frac{1}{\lambda} \geqslant 1$.

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n} = 1$.

<u>Énoncé :</u>