$\boxed{\text{Elements d'analyse vectorielle.}}$

1 Angles solides.

1.1 Angles dans le plan.

$$\boxed{d\alpha = dl\,\overrightarrow{n}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}.}$$

où n est un vecteur normal à dl et unitaire.

1.2 Angles solides.

$$\boxed{d\Omega = d\,\overrightarrow{S}\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}.}$$

1.2.1 Angles solides particuliers.

Cone de révolution. $d\Omega = 2\cdot\pi\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha$; $\Omega = 2\cdot\pi\cdot(1-\cos\theta)$.

Espace entier. $\Omega = 4\cdot\pi$.

Demi-espace. $\Omega = 2\cdot\pi$.

2 Champs.

2.1 Gradient.

Définition intrinsèque du gradient : $\boxed{d\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\nabla} f\cdot d\,\overrightarrow{r}.}$

Type de coordonnées	Expression du gradient.
Cartésiennes	$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{\nabla} f$
Cylindriques	$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\overrightarrow{u_z}.$
Sphériques	$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\overrightarrow{u_\varphi}.$

2.2 Divergence (scalaire).

$$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.} \quad ; \quad \boxed{\text{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}.}$$

2.3 Rotationnel (vecteur).

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}.}$$

2.4 Laplaciens.

2.4.1 Laplacien scalaire.

$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right).} \qquad ; \qquad \boxed{\Delta f = \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} f\right) = \overrightarrow{\nabla}^2 f.}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

2.4.2 Laplacien vectoriel.

$$\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A} = \begin{cases} \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A_x} \\ \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A_y} \\ \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A_z} \end{cases}$$

Définition intrinsèque.

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right).}$$

2.5 Formulaire.

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) \equiv \overrightarrow{0}$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f \equiv 0.}$
- $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) \equiv 0$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \equiv 0.}$

- $\boxed{\overrightarrow{\nabla} fg = g\overrightarrow{\nabla} f + f\overrightarrow{\nabla} g.}$
- $\boxed{\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(f\overrightarrow{A}\right) = f\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{\nabla} f) \cdot \overrightarrow{A}.}$
- $\boxed{\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(f\overrightarrow{A}\right) = f\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla} f \wedge \overrightarrow{A}.}$

- $\boxed{\overrightarrow{\nabla} g\left[f\left(\overrightarrow{r}\right)\right] = g'\left(f\right) \cdot \overrightarrow{\nabla} f.}$

2.6 Circulation et flux d'un champ de vecteur.

2.6.1 Circulation et théorème de Stokes.

$$\boxed{C = \int_P^Q \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r}.} \qquad ; \qquad \boxed{\oint \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{l} = \iint_\Sigma \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) \cdot d\overrightarrow{S}.}$$

Cette formule donne la définition intrinsèque du rotationnel : $\quad dC = \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) \cdot \overrightarrow{u}\, dS.$

Formule de Kelvin. $\quad \oint f d\overrightarrow{l}\, s = -\iint_\Sigma \overrightarrow{\nabla} f \wedge d\overrightarrow{S}.$

Champ à circulation conservative. = qui ne dépend pas de la courbe Γ.

$\oint \overrightarrow{A} \cdot d\,\overrightarrow{l} \equiv 0$	$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} f$ ou $\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\nabla} V$

2.6.2 Flux et théorème de Greene et Ostrogradski.

$$\boxed{\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S}.} \quad ; \quad \boxed{\oiint_\Sigma \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} d\tau.}$$

Cette formule donne la définition intrinsèque de la divergence.

Corollaires.

- $\oiint \overrightarrow{A} \wedge d\overrightarrow{S} = -\iiint \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} d\tau.$
- $\oiint f d\overrightarrow{S} = \iiint \overrightarrow{\nabla} f d\tau.$

Champ à flux conservatif. qui ne dépend que du contour Γ.

$\oiint_{\text{surface fermée}} = 0$	$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$	$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}$

Le potentiel vecteur $\overrightarrow{B}$ est défini à un gradient près.

3 Gradients et Laplaciens de $\dfrac{1}{r}$.

3.1 Gradients de $\dfrac{1}{r}$.

$\longrightarrow$ soit point P, soit point M fixe.

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla}_M \frac{1}{r} = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}.} \qquad \text{On a : } \quad \overrightarrow{\nabla}_P = -\overrightarrow{\nabla}_M.$$

3.2 Laplacien de $\dfrac{1}{r}$.

$\overrightarrow{\nabla}^2_M \dfrac{1}{r} = 0$ si $M \neq P$, sinon valeur infinie.

4 Distribution de Dirac.

4.1 Unidimensionnelle.

4.1.1 Fonction porte.

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{ si } |x| \leqslant \dfrac{a}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et telle que : } \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x)\ dx = 1.$$

4.1.2 Définition de la fonction de Dirac.

$\delta(x) = \lim\limits_{a \to 0} \Pi_a(x).$

- $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0.$

- $\delta(x) = +\infty \quad \text{si } x = 0.$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\ dx = 1.$

4.1.3 Propriétés.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx = f(x_0).$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \delta'(x - x_0)\ dx = -f'(x_0).$

4.2 De même pour 3 dimensions.

- $\displaystyle\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\ \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) d\vec{r} = f(\vec{r_0}).$
- $\displaystyle\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\ \vec{\nabla}\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) d\vec{r} = -\vec{\nabla} f(\vec{r_0}).$

5 Equations de Laplace et de Poisson.

5.1 Equation de Laplace.

φ vérifie l'équation de Laplace si $\boxed{\vec{\nabla}^2 \varphi = 0.}$

Les solutions sont des fonctions harmoniques, il en existe une infinité.

Lorsque $\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$ est vérifiée, on a : $\quad \varphi(M) = <\varphi> = \dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \displaystyle\iint \varphi(P) dS.$

5.2 Equation de Poisson.

Equation de Laplace avec un second membre : $\boxed{\vec{\nabla}^2 \varphi = f(\vec{r}).}$

5.3 Conditions aux limites de Dirichlet.

S'il existe une solutions qui prend les valeurs imposées sur la surface fermée Σ et vérifie l'équation $\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$ sur le domaine D, alors elle est unique.

5.4 Conditions aux limites de Neumann.

Conditions : $\begin{cases} \vec{\nabla}^2 \varphi = f(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} \end{cases}$ Alors la solution (si elle existe) est unique à une constante près.

5.5 Conditions aux limites mixtes.

La solution est unique.

5.6 Théorème de superposition.

Pour Laplace, si φ_1 et φ_2 sont solutions des équations (1) et (2), alors $\lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2$ est solution de $\lambda_1 \cdot (1) + \lambda_2 \cdot (2)$.