

La conduction thermique

1 Loi de Fourier

LOI DE FOURIER :

Milieu isotrope, ETL, conduction \implies

$$\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$$

λ est la conductivité thermique, en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. Ordres de grandeur :

- Pour les gaz : $\lambda \approx 10^{-2} W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- Pour les solides, il y a la conduction thermique électronique : $\lambda \approx 400 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, et phonique $\lambda \approx 2000 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

2 Flux thermique à une paroi

- On s'intéresse à l'interface entre un solide (seulement conduction) et un fluide (conduction et convection).
- A l'interface, la température et le flux de chaleur sont continus.
- Dans le solide, la loi de Fourier donne : $j_Q(x = 0^-) = -\lambda_S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0^-}$.
- Quand on s'éloigne de la paroi du côté du fluide, c'est la convection qui domine.

LOI DE NEWTON :

Soit T_1 la température de la paroi, et T_F celle du fluide, alors on a :

$$j_Q(x = 0^+) = h \cdot (T_1 - T_F)$$

- h est le coefficient de transfert conducto-convectif $h = \frac{\lambda_f}{\xi}$, en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

3 Distribution de température dans les solides

3.1 Bilan d'énergie

- $\frac{dH}{dt} = \iiint p \, d\tau - \oint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}$, p puissance volumique fournie au système.
- **Expression locale :** $\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = p$.
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = -\lambda \cdot \vec{\nabla}^2 T$, et $\frac{\partial h}{\partial t} = \rho \cdot c_{pm} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$.

EQUATIONS DE LA TEMPÉRATURE ET DE LA CHALEUR :

1. Equation de la température : $\rho \cdot c_{pm} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \cdot \vec{\nabla}^2 T = p$.

2. Equation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \vec{\nabla}^2 T$ (cas où $p = 0$).

- $D = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_{pm}}$ ($m^2 \cdot s^{-1}$) est la diffusivité thermique du matériau.

3.2 Problèmes unidimensionnels

3.2.1 Problème unidirectionnel

On effectue un bilan enthalpique sur une couche comprise entre x et $x + \delta x$.

$$d\delta H = j_Q(x) \cdot S \cdot dt - j_Q(x + \delta x) \cdot S \cdot dt + p \cdot S \cdot \delta x \cdot dt = \left(\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p \right) \cdot S \cdot \delta x \cdot dt$$

D'autre part, on a : $d\delta H = \delta c_P \cdot dT = \rho \cdot c_{p_m} \cdot S \cdot \delta x \cdot dT = \rho \cdot c_{p_m} \cdot S \cdot \delta x \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt$.

D'où :

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p = \rho \cdot c_{p_m} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

3.2.2 Problème à symétrie cylindrique de révolution

On effectue un bilan enthalpique sur un manchon cylindrique élémentaire de rayon compris entre r et $r + \delta r$, et de hauteur l .

$$d\delta H = j_Q(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot dt - j_Q(r + \delta r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r + \delta r) \cdot l \cdot dt + p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \delta r \cdot dt$$

D'autre part : $d\delta H = \rho \cdot c_{p_m} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \delta r)$.

D'où :

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + p = \rho \cdot c_{p_m} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

3.2.3 Problème à symétrie sphérique

On effectue un bilan enthalpique sur une couche sphérique élémentaire de rayon compris entre r et $r + \delta r$.

$$d\delta H = j_Q(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dt - j_Q(r + \delta r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot (r + \delta r)^2 \cdot dt + p \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \delta r \cdot dt$$

D'autre part : $d\delta H = \rho \cdot c_{p_m} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \delta r)$.

D'où :

$$\lambda \cdot \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + p = \rho \cdot c_{p_m} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

3.3 Transports linéaires en régime permanent

Par analogie avec l'électrocinétique, on introduit les résistances thermiques.

3.3.1 Propagation unidirectionnelle

On a par application de la loi de Fourier : $\Phi = j_Q \cdot S = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot S$

D'où : $-dT = \frac{1}{\lambda \cdot S} \cdot \Phi \cdot dx$. Soit en intégrant : $T_A - T_B = \frac{l}{\lambda \cdot S} \cdot \Phi$.

On introduit alors la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{l}{\lambda \cdot S}$$

R_{th} s'oppose au flux de chaleur.

3.3.2 Résistance de transfert conducto-convectif

On introduit :

$$R_{cc} = \frac{1}{h \cdot S}$$

3.4 Remarques complémentaires

-
$$\Phi = \mathcal{P} = \frac{\delta Q}{dt} = \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}$$

- On a donc dans le cas de la propagation unidirectionnelle :
$$T_A - T_B = R_{th} \cdot \phi$$
, et $\phi = j_Q \cdot S$.